



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1

Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Αν $x = 253$ και $y = 247$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = x[2x - y - 2(x - y)] + y(4 - x) + 4x.$$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = (2^4)^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-4} \qquad \text{ii) } B = \frac{(7^3)^5 \cdot 7^6}{(7^4 \cdot 7^{-11})^{-3}}.$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \frac{(5^{-2} \cdot 5^3)^2}{5^2} & \text{ii) } \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-5}}{(3^{-2} \cdot 3)^{-2}} \\ \text{iii) } \frac{3^5 \cdot 2^6}{3^4 \cdot 2^5} & \text{iv) } \frac{(-2^2)^3 \cdot (-2)^6 \cdot (-2^3)^3}{-2^4 \cdot (-2)^5}. \end{array}$$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = (-0,25)^{17} \cdot 8^{11} \qquad \text{ii) } B = \left(\frac{4}{2^3}\right)^3 \cdot \frac{(0,25)^3}{(1,25)^3}.$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = (-3)^4 + (-3)^3 - (-3)^2 \qquad \text{ii) } B = (-4)^{10} : 2^{17} - [(-2)^3]^4 : 8^3.$$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i) } A = \frac{2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5}{8^3 : 2^7 + 1} \qquad \text{ii) } B = \frac{3^{-7} \cdot 6^5 \cdot 12^{-3}}{2^{-2} : 81^2}.$$

7. Δίνεται η παράσταση

$$A = \left[(xy^2)^5 \cdot (x^2y^3)^{-4} \cdot y \right] : \left(\frac{y^3}{x^{-4}} \right)^{-2}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$A = x^5 \cdot y^5.$$

- ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 4$ και $y = 5$.

8. Αν $x = -1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i)} \quad A = -3x^{2017} - (-y)^2 + (2x + y)^{2017} \qquad \text{ii)} \quad B = (x + y)^{x+y} - \left(\frac{x}{y}\right)^x$$

$$\text{iii)} \quad \Gamma = -x^3 - (-x)^5 - x^x \qquad \text{iv)} \quad \Delta = \frac{(x^{-2}y)^{-3} (xy^2)^{-1}}{x^2 (y^{-3})^2}.$$

9. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις

$$x^y = 2 \quad \text{και} \quad y^x = 1,$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x^{2y} + y^{2x}}{x^{-y} \cdot y^{-x}}.$$

10. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις

$$x^2 = 3 \quad \text{και} \quad y^2 = 2,$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{-xy^{-1}}{x^{-1}y^{-3}}\right)^{-2}.$$

11. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i)} \quad A = -5(2x^{-1}y^{-2})^{-2} \cdot (x^{-2})^{-1} \qquad \text{ii)} \quad B = \frac{(x^{-3}y^{-1})^3}{(x^{-1}y)^{-1}} : \frac{(x^{-1})^{-2}y^4}{x^2(y^{-1})^4}.$$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \left[(2x^{-3}y^{-2})^{-3} \cdot x^{-4} \cdot y^{-5} \right]^{-2} \qquad \text{ii)} \quad \frac{\left[(3x^{-2}y)^2 \right]^{-4}}{(2xy^3)^{-5}}.$$

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad (x^3y^{-1}) \cdot (x^{-2}y^{-2})^{-3} \qquad \text{ii)} \quad \left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2} : \frac{(x^{-3}y)^{-2}}{xy}$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{-2x^2}{y^{-2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{4y^2}{x^{-3}}\right)^{-2} \qquad \text{iv)} \quad \left(\frac{x^3}{y^{-2}}\right)^3 : \left(\frac{y^3}{x^{-4}}\right)^2.$$

14. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad A = \frac{x^4 y^5 + (x^2 y)^3}{x \cdot (xy)^3}$$

$$\text{ii)} \quad B = \frac{(x^{-3} \cdot y)^2 \cdot x^{11}}{(xy^{-1})^3 \cdot (xy)^5}$$

15. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{5},$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i)} \quad A = \frac{10\alpha + 7\beta}{\beta}$$

$$\text{ii)} \quad B = \frac{4\alpha - 3\beta}{\alpha + \beta}.$$

16. Έστω πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέτοιοι, ώστε

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{\beta + \delta} = \frac{1}{4}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\gamma = 2\alpha \quad \text{και} \quad \delta = 3\beta.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma}{\beta\gamma + \gamma\delta}.$$

17. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

$$\text{i)} \quad (x + 5)^2$$

$$\text{ii)} \quad (3 + 2x)^2$$

$$\text{iii)} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\text{iv)} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

18. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

$$\text{i)} \quad (x - 4)^2$$

$$\text{ii)} \quad (7 - x)^2$$

$$\text{iii)} \quad (2x - 3)^2$$

$$\text{iv)} \quad \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2.$$

19. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $\left(x + \frac{3}{2x}\right)^2$

ii) $(-y + 2)^2$

iii) $(-2x - 3y)^2$

iv) $\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$.

20. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(x - 7)(x + 7)$

ii) $(8 - \alpha)(8 + \alpha)$

iii) $(4x - 3)(4x + 3)$

iv) $\left(\frac{\alpha}{3} - 2\beta\right)\left(\frac{\alpha}{3} + 2\beta\right)$.

21. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(x + 1)^3$

ii) $(2 + \alpha)^3$

iii) $(2x + y)^3$

iv) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$.

22. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(\alpha - 2)^3$

ii) $(2x - 1)^3$

iii) $(x - 2y)^3$

iv) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$.

23. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(\alpha + 2)^3$

ii) $(-1 + y)^3$

iii) $(-x - y)^3$

iv) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$.

24. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

ii) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

iii) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

iv) $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2 - 1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

25. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(x-1)(x^2+x+1)$

ii) $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$

iii) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$

iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$.

26. Να βρείτε τα αναπτύγματα των:

i) $(\alpha+2\beta+1)^2$

ii) $(x+y+2\omega)^2$

iii) $(\alpha+\beta-\gamma)^2$

iv) $(2x-y-3\omega)^2$.

27. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $(5x+2)^2-(4x-3)(4x+3)$

ii) $(2\alpha-5\beta)^2-(\alpha-\beta)^2+18\alpha\beta$

iii) $(x+1)^3-4(x-1)^2+(x-2)(x+2)$

iv) $(2x-1)^3+4(x+1)^3$.

28. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $(x+2)^3-3(x-1)(x+1)-(x+1)^2$

ii) $9(x-1)^2-(3x-2)^2$

iii) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\gamma)^2$

iv) $(2x-y)(2x+y)-(x-y)^2+(x+y)^2$.

29. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει η σχέση $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 4$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$

ii) $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$.

30. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση

$$x - \frac{1}{x} = -1,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $x^2 + x$

ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

iii) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

iv) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

31. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha + \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^3 + \beta^3 = 28,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$

iii) $\alpha\beta$

iv) $\alpha^2 + \beta^2$.

32. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha + \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha\beta = 2,$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

ii) $\alpha^2 + \beta^2$

iii) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

iv) $\alpha^3 + \beta^3$.

33. Αν $x - y = 3$, να αποδείξετε ότι

$$x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 2y = 3.$$

34. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x + 3,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = x + 1$

ii) $x^3 + \frac{1}{x^3} = x^2 + 1$.

35. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 4,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

ii) $\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

36. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\alpha^2 \neq \beta^2$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\beta}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} = 0.$$

37. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) \quad \text{ii) } (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

38. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\alpha + 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 = 5\alpha^2 + 5\beta^2 \quad \text{ii) } (\alpha - 1)^2 (\alpha + 1)^2 + (\alpha^2 + 1)^2 = 2\alpha^4 + 2.$$

39. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\alpha - 2)(\alpha - 3) = (\alpha - 1)(\alpha - 4) + 2 \quad \text{ii) } (\alpha - 4)(\alpha - 5) = (\alpha - 2)(\alpha - 7) + 6.$$

40. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = (\alpha\beta - 1)^2$$
$$\text{ii) } (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)^2.$$

41. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } \left(\frac{\alpha^2 + 1}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^2 \quad \text{ii) } \left(\frac{\alpha^2}{4} + 1\right)^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha^2}{4} - 1\right)^2$$
$$\text{iii) } \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \quad \text{iv) } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta).$$

42. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$
$$\text{ii) } (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)$$
$$= 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4.$$

43. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^2 = 1$$
$$\text{ii) } \alpha^2(\beta + 1) + \beta^2(\alpha + 1) + \alpha + \beta + 2\alpha\beta = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta).$$

44. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha - \beta = 4$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + 5\beta + 4 = 2\alpha\beta + 5\alpha.$$

45. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $5x^2 - 20$

ii) $3x^2y^2 - 27$

iii) $(\alpha^2 - 3)^2 - 9$

iv) $2\alpha^3\beta^3 - 16$.

46. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $2x^2y - 6xy\omega + 8xy^2$

ii) $3x^3 - x^2y + 6x - 2y$

iii) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

iv) $16x^4 - y^8$.

47. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $x\sqrt{x} - 2x - 5\sqrt{x} + 10$

ii) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 1$

iii) $x^2 - y^2 - 2x + 1$

iv) $4(x-3)^2 - (2x-3)^2$.

48. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $9x^2 - 6xy + y^2$

ii) $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha$

iii) $24x^3 - 3$

iv) $\alpha^2 - 6\alpha + 9 - \beta^2$.

49. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $(\alpha^3 - 1) - 2(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1)^2$

ii) $(\alpha^2 - 9)^2 - (\alpha + 3)^2$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 + 9 + 2\alpha\beta + 6\beta + 6\alpha$

iv) $x^2 - (x - y)^2$.

50. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $8\alpha^3 - \beta^3$

ii) $27\alpha^3 + 1000\beta^3$

iii) $\alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 + 8\beta^3$

iv) $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1$.

51. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις:

i) $x^2 - x + y - xy$

ii) $\varphi^4 - \omega^8$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha$

iv) $(x^5 + x + 1)(x^5 + x + 3) + 1$.

52. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $1502^2 - 1498^2$

ii) $998 \cdot 1002$

iii) $\frac{(11,32)^2 - (7,32)^2}{18,64}$

iv) $\frac{754^3 - 654^3}{754^2 + 754 \cdot 654 + 654^2}$.

53. Αν n είναι θετικός ακέραιος αριθμός, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}.$$

54. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ο αριθμός

$$5^{n+2} - 5^{n+1} - 5^n$$

είναι πολλαπλάσιο του 19.

55. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ο αριθμός

$$3^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+1} - 4 \cdot 3^n$$

είναι πολλαπλάσιο του 11.

56. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$\frac{3y - 2x}{3y - 4x} = 2,$$

τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$y = 2x$$

ii) να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}.$$

57. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

ii) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$

iii) $\frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} \cdot \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - y} \cdot \frac{y^3 - y^2}{y^3 + y}$

iv) $\frac{(x+1)^2 + 2(x+1) + 1}{(x+1)^2 - 1}$.

58. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{(x^2 - x) + x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x^3 - y^3}{(xy - y^2)^2} : \frac{xy + x^2}{x^2 - y^2}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{x^3 + x^2y}{x^2 - y^2} : \frac{xy^2 + x^2y}{x - y}$$

59. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύει

$$\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2.$$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{757^3 - 243^3}{514} + 757 \cdot 243.$$

60. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{x^3 + y^3 - x^2 + y^2 + (xy + y^2)(x - 2y)}{(x + y)^2 - x - y}.$$

61. i) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{(\alpha - 2)^2 - (\alpha + 1)(\alpha - 1) - 1}{(\alpha - 1)^2 - (\alpha + 1)^2}.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{998^2 - 1001 \cdot 999 - 1}{999^2 - 1001^2}.$$

62. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 + (\alpha - \beta)^3} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + (\alpha - \beta)}.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{699^3 + 350^3}{699^3 + 349^3}.$$

63. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \left[\left(\alpha + \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \cdot \left(\alpha - \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) \right] : \left(\alpha^2 + 1 + \frac{1}{\alpha^2-1} \right)$$

$$\text{ii)} \quad \frac{3x-5y}{(2x+3y)^2} : \frac{(3x-5y)^2}{4x^2-9y^2}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \cdot \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$$

64. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x^3-y^3}{x^3-y^3-2xy(x-y)}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{(\alpha^2-x^2)[(\alpha+x)^2-(\alpha-x)^2]}{4x\alpha^3-4x^3\alpha}$$

$$\text{iv)} \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

65. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \left[\frac{\alpha^2-1}{(\alpha+1)^2} + \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2-1} \right] \cdot \left(\frac{\alpha^3+\alpha}{2\alpha^2} + 1 \right) \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$

$$\text{ii)} \quad \left[\frac{\alpha^2-4}{(\alpha+2)^2} + 2 \frac{(\alpha^2-4)^2}{(\alpha+2)^4} + \frac{(\alpha^2-4)^3}{(\alpha+2)^6} \right] : \frac{\alpha^2-4}{(\alpha+2)^4}$$

66. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \left(\frac{xy-x^2}{x^2y+y^3} + \frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2} \right) \cdot \frac{xy}{x+1}$$

είναι ανεξάρτητη των x, y για όποια x, y αυτή ορίζεται.

67. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)(x^9-1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^9+1)} = 1.$$

68. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \alpha + 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$E = \frac{(\alpha^2 + 2\alpha + 2)^3 + (\alpha^2 + 2\alpha + 2)^2(\alpha + 1) + (\alpha^2 + 2\alpha + 2)(\alpha + 1)^2}{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}.$$

69. Αν οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta + 2$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

i) οι αριθμοί $x = \alpha\beta - 3$ και $y = 2\alpha - \beta$ είναι αντίθετοι

ii) οι αριθμοί $z = \alpha^2 - 1$ και $\omega = \frac{\beta + 2}{\alpha + 1}$ με $\alpha \neq -1$ είναι αντίστροφοι.

70. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται:

i) $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

ii) $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$

iii) $\frac{x^2 - x + 2(x - 1)}{x^2 - 1}$

iv) $\frac{x^3(x + 1) + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

v) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^3 + x^2}{(x + 1)^3}$

vi) $\frac{x(x - 2) + 1}{(x - 2)(x - 1)}$.

71. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma.$$

72. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{\beta}{\beta - 1} = 4,$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \beta = \frac{2\alpha\beta + 4}{3}.$$

73. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$2\beta = 1 + \alpha\beta \quad \text{με } \alpha \neq 1 \text{ και } \beta \neq 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{\beta+1}{\beta-1} = 2.$$

74. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{4\alpha}{\alpha + \beta},$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha = \beta.$$

75. Αν α, β, x, y είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha x - \beta y = 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

76. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta$

ii) $\alpha(\alpha^3 + 6\beta^3) = \beta^2(\beta^2 + 9\alpha^2).$

77. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε

$$\alpha + \beta = 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^4 + \beta^4 - 2(\alpha\beta - 1)^2 + 1 = 0.$$

78. Να βρείτε τους αριθμούς x, y οι οποίοι είναι ανάλογοι των αριθμών 5, 7 και έχουν άθροισμα 36.

79. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{\omega}{7} \quad \text{και} \quad 4x - 3y + 2\omega = 22,$$

να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y και ω .

80. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y , ω για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$x + y + \omega = 10 \quad \text{και} \quad \frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{5}{\omega}.$$

81. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , y , ω οι οποίοι είναι ανάλογοι των αριθμών 5, 7, 9 και τέτοιοι, ώστε

$$2x = y + \omega + 12.$$

82. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+2} + \frac{\gamma}{\gamma+3} = 1,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{2}{\beta+2} + \frac{3}{\gamma+3}.$$

83. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+3} + \frac{1}{\gamma+5} = 7,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha+3}{\alpha+2} + \frac{\beta+4}{\beta+3} + \frac{\gamma+6}{\gamma+5}.$$

84. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , β , γ και δ ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \neq 0 \quad \text{και} \quad (5\alpha + 7\beta)(5\gamma + 7\delta) \neq 0,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{2\alpha + 3\beta}{5\alpha + 7\beta} = \frac{2\gamma + 3\delta}{5\gamma + 7\delta}.$$

85. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{x}{\alpha + \beta} = \frac{y}{\beta + \gamma} = \frac{\omega}{\gamma + \alpha},$$

να αποδείξετε ότι

$$(\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma)y + (\gamma - \alpha)\omega = 0.$$

86. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει η σχέση

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta,$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ή αντίθετοι ή αντίστροφοι.

87. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha + \beta + \gamma = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6,$$

τότε:

i) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

ii) να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{\alpha\beta\gamma}.$$

88. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ανάλογοι των αριθμών $\beta + \gamma, \gamma + \alpha$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

89. Έστω x, y, z θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\frac{2x}{3y + 4z} = \frac{3y}{2x + 4z} = \frac{4z}{2x + 3y}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $2x = 3y = 4z$

ii) $(x + 3y + 2z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{2z} \right) = 10.$

90. Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$x + y + z = 0 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

είναι ανεξάρτητη των x, y, z .

91. Έστω α, β μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\beta^2} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha}.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι.

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$M = \frac{(\alpha + 2\beta)^8 \alpha^{-3}}{\beta^5}.$$

92. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{2}\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{2}\alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0.$$

93. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha \neq \beta \quad \text{και} \quad \alpha + \frac{1}{\beta} = \beta + \frac{1}{\alpha},$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha\beta = -1.$$

94. i) Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 = xy \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad y = 0.$$

ii) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$(\alpha - \beta + 15)^2 = -(\alpha + 5)(\beta - 10).$$