Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Οι Πραγματικοί Αριθμοί

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2 — Διάταξη Πραγματικων Αριθμών

Ασκήσεις

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

95. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = 3\left(x^2 + 2\right) \quad \text{και} \quad B = 2\left(x^2 + 2x\right).$$

96. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha - 2$ και $2\beta + 3$ είναι ομόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = 4\beta - 3\alpha \quad \text{και} \quad B = 2\alpha\beta - 6.$$

97. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha^2 - 3$ και $5\beta - 4$ είναι ετερόσημοι, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = 5\alpha^2\beta + 12 \quad \text{και} \quad B = 4\alpha^2 + 15\beta.$$

98. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) 8^{50} και 16^{37} **ii)** 25^{100} και 125^{67}.

99. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) 2^{700} και 5^{300} **ii)** 5^{800} και 3^{1200}.

100. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 49 \geq 14\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)^2$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

101. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \geq \frac{4}{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

102. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha^2 + 1\right)\left(\beta^2 + 1\right) \geq \left(\alpha\beta + 1\right)^2$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

103. Αν α, β είναι δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

i) $\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\geq 4$ **ii)** $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 8.$

104. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $\alpha^2+\beta^2+5\geq 2\alpha+4\beta$ **ii)** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 2(\alpha+2\beta+3\gamma-7)$.

105. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $\alpha^2+2\alpha+2>0$ **ii)** $\alpha^2+5>4\alpha$

iii) $\alpha^2+10\alpha>-26$ **iv)** $\alpha^2+\beta^2+3>2\alpha+2\beta.$

106. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ **ii)** $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0.$

107. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}\geq\frac{(x+y)^2}{8}$ **ii)** $x^4+y^4\geq 2xy(x^2+y^2-xy)$.

108. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>0$ ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3.$$

109. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $(x-4)^2+(y+3)^2=0$ **ii)** $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

110. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A=x^2+2y^2+1 \quad \text{και} \quad B=2y(1-x), \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $A-B=(y-1)^2+(x+y)^2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $A\geq B$.

iii) Αν $A=B$, να βρείτε τις τιμές των x και y.

111. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2(\alpha-\beta-1) \quad \text{για κάθε} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ .$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

112. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $x^2+y^2-4x+4=0$ **ii)** $x^2+y^2-2x-6y+10=0.$

113. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $(x+1)^2+y^2+2(x+1)+6y+10=0$ **ii)** $2x^2+2y^2+2x-2y+1=0.$

114. Να αποδείξετε τις ανισότητες:

i) $2x^2+1>2x$ **ii)** $x^4-x^2+4x+5>0.$

115. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $3\alpha^2+2\alpha+1>0$ **ii)** $\alpha^2+\beta^2+8\geq 4(\alpha+\beta)$.

116. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$

για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

ii) αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$$

iii) αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, τότε

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=\beta=\gamma.$$

117. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

ii) αν $\alpha+\beta+\gamma=-1$, τότε $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2>1.$

118. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις

$$1 \le x < 3 \quad \text{και} \quad 2 \le y < 4,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $-7 < 5x - 3y < 9$ **ii)** $\frac{1}{4} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$.

119. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις

$$5 < x < 7 \quad \text{και} \quad 3 < y < 5,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $11 < x + 2y < 17$ **ii)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{8}{15}$

iii) $0 < x - y < 4$ **iv)** $x^2 - y^2 < 48$.

120. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει $\alpha > \beta > \gamma$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 < \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha.$$

121. Έστω α, β δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha \ne 1, \quad \beta \ne 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-2} + \beta^{-2} = \alpha^{-1} + \beta^{-1}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\alpha - 1}{\beta - 1} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ **ii)** οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι ετερόσημοι.

122. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\alpha + \beta > 4 \quad \text{και} \quad \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 > 0.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha > 2 \quad \text{και} \quad \beta > 2.$$

123. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $x > 0$ **ii)** $x < 1$.

124. Να αποδείξετε ότι για κάθε x, y, z $\in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $x^2+y^2\geq 2xy$ **ii)** $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$.

125. Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\frac{x+y}{2}$ **ii)** $\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\geq x+y+z$.

126. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $(x+y)^2\geq xy$ **ii)** $(2x+3y+1)^2\geq(x+2y)(x+y+1)$.

127. Να αποδείξετε ότι:

i) $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ για κάθε $x, y\in R$

ii) αν $x+y=1$, τότε $4xy\leq 1$.

128. Έστω α και β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha+\beta=1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq 4.$$

129. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha\beta\leq\frac{1}{4}.$$

130. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση $\alpha\beta=1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha+\beta\geq 2.$$

131. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει

$$0<\alpha<1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}>2.$$

132. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει η σχέση $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 > 0.$$

133. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + \frac{1}{\beta} > \beta^3 + \frac{1}{\alpha}.$$

134. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha > \beta > 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\alpha + \beta^2 < \beta + \alpha\beta.$$

135. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\beta > \alpha > 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha - 1}{\beta - 1} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}.$$

136. Αν α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

137. Αν α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ **ii)** $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$

iii) $5\sqrt{\alpha + \beta} \geq 3\sqrt{\alpha} + 4\sqrt{\beta}$ **iv)** $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > \sqrt{\alpha + \beta}$.

138. Να αποδείξετε ότι

$$\left(x^2 + 1\right)^2 > 2x^3 + 2x \quad \text{για κάθε} \quad x \neq 1.$$

139. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει η σχέση $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} < \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}.$$

140. Αν α, β και γ είναι τρεις θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha + \beta + \gamma} \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

141. Αν α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{1}{\alpha^4 + \beta^2} \leq \dfrac{1}{2\alpha^2\beta}$ **ii)** $\dfrac{\alpha}{\alpha^4 + \beta^2} + \dfrac{\beta}{\beta^4 + \alpha^2} \leq \dfrac{1}{\alpha\beta}.$

142. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta + 1} + \frac{\beta}{\alpha + 1} \leq 1.$$

143. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει

$$x > y > 0,$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\alpha = x^3 - y^3 \quad \text{και} \quad \beta = (x - y)^3.$$

144. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει

$$\alpha < 2 < 3\beta,$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$x = 3\alpha\beta + 4 \quad \text{και} \quad y = 2\alpha + 6\beta.$$

145. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^{-1} + \alpha^{-3} > \alpha^{-2} \quad \text{για κάθε} \quad \alpha > 0.$$

146. Έστω πραγματικός αριθμός α τέτοιος, ώστε

$$17<\alpha<31 \qquad \text{και} \qquad 2^{\nu}<\alpha<2^{\nu+1},$$

όπου ν κάποιος ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

i) $2^{\nu}<31$ **ii)** $17<2^{\nu+1}$

iii) $\frac{17}{2}<2^{\nu}<31$ **iv)** $\nu=4$.

147. Αν δύο αριθμοί α και β ανήκουν στο διάστημα $[0,2]$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha-\beta$ ανήκει στο διάστημα $[-2,2]$.

148. Αν $x\in[-2,3]$, να αποδείξετε ότι:

i) $-5\le 2x-1\le 5$ **ii)** $-1\le 2-x\le 4$.

149. Αν $x\in(-1,5)$, να αποδείξετε ότι:

i) $1<4x+5<25$ **ii)** $(x+1)^2<36$.

150. Αν $\alpha\in(2,5)$ και $\beta\in(4,7)$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^3+\beta^2>24$ **ii)** $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{12}{35}$

iii) $\alpha^6-\beta^2>15$ **iv)** $\alpha\beta+20<4\alpha+5\beta$.

151. Αν $x,y\in[2,3]$, να αποδείξετε ότι:

i) $(2x-3y)(3x-2y)\le 0$ **ii)** $6(x^2+y^2)\le 13xy$.

152. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι σχέσεις

$$x\in(-2,4) \quad \text{και} \quad y\in(3,6),$$

να αποδείξετε ότι:

i) $(x+2)(y-6)<0$ **ii)** $(x-4)(y-3)<0$

iii) $9x+2y>2xy$ **iv)** $(x+2)(y-3)<18$.

153. Δίνεται η παράσταση

$$A = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 10.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $A = (x-3)^2 + (2y+1)^2$

ii) αν $A = 1$, τότε

$$x \in [2, 4] \quad \text{και} \quad y \in [-1, 0].$$

154. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$xy = 6, \quad x > 2 \quad \text{και} \quad y > 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(x-2)(x-3) < 0$

ii) $x + y < 5.$

155. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση

$$(\alpha+1)(\alpha+9) = 4\beta,$$

να αποδείξετε ότι

$$\beta \geq \alpha.$$

156. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \quad \text{και} \quad \alpha + \beta + \gamma = 3.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha \leq 1$

ii) $\beta \leq \dfrac{3}{2}$

iii) $1 \leq \gamma \leq 3$

iv) $2\alpha\beta + 3 \geq 3\alpha + 2\beta.$

157. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,\ y,\ z \in (0,1)$ ισχύουν οι σχέσεις:

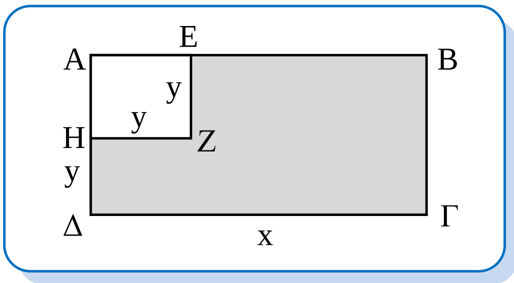
i) $xy + 1 > x + y$

ii) $xyz + 1 > xy + z$

iii) $xyz + 2 > x + y + z$

iv) $xy + yz + zx + 3 > 2(x + y + z).$

158. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x, 2y. Αφαιρούμε το τετράγωνο ΑΕΖΗ με πλευρά y.



i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχήματος ΒΓΔΗΖΕ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $E = 2xy - y^2$.

ii) Αν ισχύουν οι σχέσεις $3 < x < 5$ και $1 < y < 2$, να αποδείξετε ότι

$$4 < E < 18.$$

159. Να αποδείξετε ότι ο μόνος θετικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\alpha^7 + \alpha^4 + \alpha = 3$$

είναι ο αριθμός

$$\alpha = 1.$$