



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι Πραγματικοί Αριθμοί

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.3

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Περιεχόμενα

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Θεωρία.....	1
Λυμένες Ασκήσεις.....	4

Ασκήσεις για Λύση

160. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

i) $|\pi - 4|$

ii) $|\sqrt{2} - 1|$

iii) $|\sqrt{2} - 2|$

iv) $|3 - \pi|$.

161. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

i) $|\sqrt{7} - 3|$

ii) $|1 - \sqrt{3}|$

iii) $|-y|^2$

iv) $|-\sqrt{2} - x^2|$.

162. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

i) $A = |-2| + |5| + |-7|$

ii) $B = |\sqrt{7} - 2| + |\sqrt{7} - 3|$

iii) $\Gamma = \left| |\sqrt{5} - 2| - 1 \right|$

iv) $\Delta = \left| \left| \sqrt{11} - 3 \right| - \left| \sqrt{11} - 5 \right| \right|$.

163. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

i) $A = \left| \frac{72}{48} - \frac{88}{66} \right|$

ii) $B = \left| \frac{2^{30} \cdot 2^2 \cdot 3^{17} \cdot 3^{15}}{6^9 \cdot 6^{21}} - \frac{21 \cdot 36}{63} \right|$

iii) $\Gamma = |333^2 - 332^2 - 670|$

iv) $\Delta = \left| \frac{39^3 - 38^3}{39^2 + 39 \cdot 38 + 38^2} - \frac{37^3 + 36^3}{37^2 - 37 \cdot 36 + 36^2} \right|$.

164. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |x^2 + 5| - |-x^2 - 1|$

ii) $B = |(x-1)(x+1) + 5| - |x^2 - 6x + 9|$

iii) $\Gamma = |x^2 + 2x + 1| - |4x - x^2 - 4|$

iv) $\Delta = \left| (2x+1)^2 - (x+2)^2 - 2x^2 + 4 \right|$.

165. Να εκφράσετε για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

i) $|x + 5|$

ii) $|2 - x|$.

166. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής κάθε μία από τις παραστάσεις:

i) $A = |x - 2| + 3x - 7$

ii) $B = |x - 3| + |x - 5|$.

167. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παρακάτω παραστάσεις:

i) $A = |x - 5| + 2x - 1$

ii) $B = |x + 2| - 3x + 4$.

168. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής κάθε μία από τις παραστάσεις:

i) $A = |x - 5| + |7 - x|$

ii) $B = |x + 2| + 3|x - 1|$.

169. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής κάθε μία από τις παραστάσεις:

i) $A = |x| + |x - 2|$

ii) $B = |x^3 - x^2|$.

170. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α , β και γ ισχύει

$$\alpha < \beta < \gamma,$$

να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = 3|\alpha - \beta| + 2|\beta - \gamma| - 4|\gamma - \alpha|.$$

171. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$-1 < x < 2,$$

να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = 2|x + 1| + 3|x + 2| + 6|x - 2|.$$

172. Αν $3 < x < 6$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |x - 6| + |x - 3|$

ii) $B = |3 - x| + |9 - x|$

iii) $\Gamma = |x - 6| - |12 - 2x| - x + 9$

iv) $\Delta = ||3 - x| - 3| - 6$.

173. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |-2\alpha| - 5\alpha$, αν $\alpha \geq 0$ ii) $B = -|\beta| - 2\beta$, αν $\beta < 0$

iii) $\Gamma = |x+1| - |x+2| - |x-1|$, αν $x \in (-1, 1)$.

174. Αν $1 < x < 5$, να αποδείξετε ότι:

i) $|x-1| + |x-5| = 4$ ii) $|x-1| + |x-5| < |x+2| + |x-6|$.

175. Αν $\alpha \in (2, 3)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $-2 < \alpha - 4 < -1$ και $-3 < -3\alpha + 6 < 0$

ii) να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = 3|\alpha - 2| + |\alpha - 4| + |-\alpha| - |6 - 3\alpha|.$$

176. Έστω πραγματικός αριθμός α τέτοιος, ώστε

$$0 < \alpha < 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha - 2) \cdot |\alpha| + \alpha \cdot |\alpha - 2| = 0$ ii) $|\alpha^2 - 2\alpha| + |\alpha^2 - 2\alpha + 1| = 1$.

177. Αν $x \in (-1, 1)$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} = x.$$

178. Αν $\alpha \in [-1, 1]$, να αποδείξετε ότι

$$||\alpha - 1| - |\alpha + 1|| = 2|\alpha|.$$

179. Αν $2 < x < 5$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $|x-5| + |x-2|$ ii) $|4x-7| + |3x-16|$

iii) $||x-5| + 1| + |2-x| + 1|$ iv) $|2|x-2| - 6|$.

180. Αν $-2 < x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |5 - |x - 3||$

ii) $B = ||x + 2| - |2x - 6| - 5|.$

181. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση

$$|x - 1| = x - 1$$

να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |x - |x - 1||$

ii) $B = |x - |x + |x - 1||$

iii) $\Gamma = ||2x - 1| - |x - 1||$

iv) $\Delta = ||1 - x| + |1 + x|| - 2x.$

182. Αν $x \geq 1$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = |x - |x - |1 - x||$

ii) $B = |x^2 - 1| + |x^2 - x^3| - |x^3 - 1|$

iii) $\Gamma = |(x - 2)^3 + 3(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 1|.$

183. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις

$$x < 0, \quad y > 0 \quad \text{και} \quad x + y \neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\frac{||x| - |y||}{|x + y|} - \frac{|x - y|}{x - y} + \frac{x - y}{|x| + |y|}.$$

184. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\frac{|x - 3|}{x^2 + 4} > 0$

ii) $\frac{|x + 1|}{x^3 + x} < 0.$

185. Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \quad \text{και} \quad \alpha|\beta| = \beta|\alpha|.$$

191. Αν $x \neq 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{||x| - x| + ||x| + x|}{|x|}.$$

192. Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

i) $|a - |a|| = 3 + |a| \Leftrightarrow a = -3$

ii) $|a + |a|| = a - |a| \Leftrightarrow a = 0.$

193. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha|\beta| + \beta|\alpha| \leq \alpha\beta + |\alpha| \cdot |\beta| \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

194. Να βρείτε τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

i) $|x - 2| + |x - y - 4| = 0$

ii) $|x - 1| + |2x + y + 5| = 0.$

195. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$|x - 1| + |x^2 y - 2x| = 0.$$

196. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, γ τέτοιοι, ώστε

$$|\alpha^2 - \alpha\beta - \gamma| + |\beta^2 - \alpha\beta + \gamma| = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \beta$

ii) $\gamma = 0.$

197. Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$|\alpha - |\alpha|| = |\alpha + |\alpha|| \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

198. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$|3x + 2y| = |2x + 3y|,$$

να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι ίσοι ή αντίθετοι.

199. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση

$$|\alpha + 2\beta| = |\beta + 2\alpha|,$$

να αποδείξετε ότι

$$|\alpha| = |\beta|.$$

200. Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha - 2\beta| + |4\alpha - 8\beta| - |10\beta - 5\alpha| = 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

201. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|3\alpha - 4\beta| = 2 \quad \text{και} \quad |3\alpha + 4\beta| = 10,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $ 9\alpha^2 - 16\beta^2 $	ii) $\left \frac{15\alpha - 20\beta}{3\alpha + 4\beta} \right $
iii) $9\alpha^2 + 16\beta^2$	iv) $\alpha\beta.$

202. Αν $x \geq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = |x - 2\sqrt{x} + 2| \cdot |x + 2\sqrt{x} + 2| - \frac{|x^3 + x^2|}{|x + 1|}.$$

203. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha| = 3 \quad \text{και} \quad |\beta| = 5,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $ 2\alpha + \beta \leq 11$	ii) $ \alpha - \beta \leq 8$
iii) $ \alpha + \beta + 2 \leq 10$	iv) $\left \frac{3}{\alpha} + \frac{5}{\beta} \right \leq 2.$

204. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha - 1| \leq 2 \quad \text{και} \quad |\beta - 2| \leq 3,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $|\alpha + \beta - 3| \leq 5$

ii) $|2\alpha + \beta - 4| \leq 7.$

204. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις:

i) $|\alpha| \leq |\alpha - 1| + 1$

ii) $|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha - 1| + |\beta - 2| + 3.$

206. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha^2 - \alpha\beta| = 2 \quad \text{και} \quad |\beta^2 - \alpha\beta| = 1,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $|\alpha| = 2|\beta|$

ii) $(\alpha - \beta)^2 \leq 3.$

207. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha^3 - 3\alpha^2\beta| = |\beta^3 - 3\beta^2\alpha| = 2,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\left| \frac{\alpha - 3\beta}{\beta - 3\alpha} \right| = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2$

ii) $|(\alpha - \beta)^3| \leq 4.$

208. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha^2 + \beta^2 = 7 \quad \text{και} \quad \alpha\beta = 3,$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $|\alpha + \beta|^2$

ii) $|\alpha - \beta|.$

209. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta \geq -1$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$|\alpha - \beta| = 2 \Leftrightarrow |\alpha + \beta| = 2\sqrt{\alpha\beta + 1}.$$

210. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις

$$|x| \leq 3 \quad \text{και} \quad |y| \leq 5,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad |x + y| \leq 8 \qquad \text{ii)} \quad |2x + y| \leq 11.$$

211. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση $|x| \geq 1$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = 2|x - 1| - 3|x| + |x + 1|.$$

212. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{και} \quad |\beta| \leq 2,$$

να αποδείξετε ότι

$$\text{i)} \quad -11 \leq 5\alpha + 3\beta \leq 11 \qquad \text{ii)} \quad |\alpha - \beta| \leq 3.$$

213. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις

$$|x| < 1 \quad \text{και} \quad |y| > 1,$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = |x^2 - 1| + |y^2 - 1| - |x^2 - y^2|.$$

214. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha < \beta + \gamma \quad \text{και} \quad \beta < \gamma + \alpha,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \gamma > 0 \qquad \text{ii)} \quad |\alpha - \beta| < \gamma.$$

215. Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$$\text{i)} \quad d(1, -2x) = d(x, -2) \Leftrightarrow d(x, 0) = 1$$

$$\text{ii)} \quad d(x, 3) = 2d(x, -3) \Leftrightarrow d(x, -5) = 4.$$

216. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $d(x, 1) \leq 5$

ii) $d(x, 2) = 1$

iii) $d(x, 2) > 4$

iv) $d(x, -3) \geq 2$.

217. Να αποδείξετε ότι

$$|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

218. Να αποδείξετε ότι

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

219. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

i) $|\alpha + \beta| < |\alpha - \beta| \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$

ii) $|\alpha - \beta| \leq ||\alpha| - |\beta|| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0$.

220. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha| < 1 \quad \text{και} \quad |\beta| < 1,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $-1 < \alpha\beta < 1$

ii) $\left| \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \right| < 1$.

221. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις

$$|\alpha - \beta| = 2 \quad \text{και} \quad |\alpha + \beta| = 4,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha\beta = 3$

ii) $\left| \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right| = \frac{4}{5}$.

- 222.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν οι σχέσεις
 $\beta \neq 0$ και $\alpha^2 > 9\beta^2$,

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } |\alpha| > 3|\beta| \qquad \text{ii) } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| > \frac{8}{3}.$$

- 223.** Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$|2\alpha + \beta| > |2\beta + \alpha| \Leftrightarrow |\alpha| > |\beta|.$$

- 224.** Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\left| |x - y| - |x + y| \right| = 2|y| \Leftrightarrow |x| \geq |y|.$$

- 225.** Αν ισχύει η σχέση $\left| \frac{\alpha + 1}{\alpha + 4} \right| \leq \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$|\alpha| \leq 2.$$

- 226.** Έστω α και β δυο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\left| \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha + \beta} \right| < 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } |\beta| < |\alpha| & \text{ii) } \alpha \neq \beta \text{ και } \alpha \neq -\beta \\ \text{iii) } \frac{|\alpha + \beta|}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} & \text{iv) } |3\alpha + 5\beta| < 8|\alpha|. \end{array}$$

- 227.** Έστω πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε

$$\alpha\beta \neq 0, \quad \alpha + \alpha\beta = \beta \quad \text{και} \quad \alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0.$$

- i)** Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0 > \beta$.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = |\beta - \alpha\beta| + \frac{|\alpha^2 + \alpha^2\beta|}{\beta}.$$