



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι Πραγματικοί Αριθμοί



Διαγωνίσματα

numerica.

A . L i a p i s

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A2. Πώς ορίζεται η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ;

A3. Τι ονομάζουμε n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2).$$

β) Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \quad \text{και} \quad \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

γ) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

δ) Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος, τότε

$$\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha.$$

ε) Αν $\alpha > 0$, τότε

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}.$$

Θέμα Β

B1. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^4 - 5\alpha^2 + 4 = (\alpha - 2)(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha + 2).$$

B2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^4 - 5\alpha^2 + 4}{(\alpha - 2)(\alpha^2 + \alpha + 1) - (\alpha - 2)(\alpha + 2)}$$

B1. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{48^4 - 5 \cdot 48^2 + 4}{46 \cdot (48^2 + 49) - 46 \cdot 50} = 50.$$

Θέμα Γ

Αν $x \in (-2, 1)$ και $y \in [1, 3]$, να αποδείξετε ότι:

Γ1. $-5 < x - y < 0$

Γ2. $|x + 2| - |y - 1| + |x - y| = 3$

Γ3. $xy + 1 \leq x + y$.

Θέμα Δ

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $(3\sqrt{5} + 7)^2 = 94 + 42\sqrt{5}$

Δ2. $3\sqrt{5} - 7 < 0$

Δ3. $\frac{3\sqrt{20}}{\sqrt{94 + 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 - 42\sqrt{5}}} = 1$.

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

A1. Για θετικούς αριθμούς α , β και θετικό ακέραιο n να αποδείξετε την ισοδυναμία
 $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$.

A2. Πότε λέμε ότι ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β ;

A3. Τι ονομάζουμε απόσταση δύο αριθμών α και β και πώς τη συμβολίζουμε;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha \geq 0$, τότε

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha.$$

β) Το διάστημα $[\alpha, \beta]$ αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$\alpha \leq x \leq \beta.$$

γ) Αν $\alpha < 0 < \beta$, τότε

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta.$$

ε) Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε

$$\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}.$$

Θέμα Β

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = (\sqrt[6]{3} - 1) \left[(\sqrt[6]{3})^2 + \sqrt[6]{3} + 1 \right] \quad \text{και} \quad B = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}.$$

Να αποδείξετε ότι:

B1. $A = \sqrt{3} - 1$

B2. $B = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

B3. $A > B$.

Θέμα Γ

Αν $d(2x, 6) < 4$ και $-5 < y < 1$, να αποδείξετε ότι:

Γ1. $|x - 3| < 2$ και $|y + 2| < 3$

Γ2. $||x - 5| - |y + 5| + 2| = x - y$

Γ3. $|xy - 3y + 2x - 6| < 6$.

Θέμα Δ

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. αν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, τότε $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} \geq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$

Δ2. αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} = \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \quad \text{και} \quad \alpha\beta < 0$$

τότε

$$\alpha + \beta = 0$$

Δ3. $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$

Δ4. $\frac{2x^2 + 2}{|x + 1| + |x - 1|} \geq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.