



Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 1

Συστήματα

Παράγραφος 1.1

Γραμμικά Συστήματα



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \frac{x+1}{4} = \frac{y+7}{3} \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x+3}{2} + \frac{y}{7} = 2 \\ \frac{x-1}{5} + \frac{y+2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \frac{x+11}{5} = 5 - \frac{y+4}{3} \\ \frac{1-x}{7} = y - 7. \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 5y = 10 \\ \frac{x}{5} + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x - 4 = \frac{y}{2}. \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x+4}{2} + \frac{y+2}{5} = 2 \\ \frac{x+2}{3} + \frac{y+1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x - \frac{5}{2}y = 4 \\ 6(x-1) = 5(3y+1) \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{3} \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 1 = \frac{y-1}{2} \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x - (\sqrt{2} + 1)y = -1 \\ \sqrt{2}x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 3 - \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{3} + 5. \end{cases}$$

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$(2x + y - 5)^2 + |3x - 2y - 4| = 0.$$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + \omega = 3 \\ 2x - y - 2\omega = 2 \\ 4x + 2y + 3\omega = 6 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 4x - y + 2\omega = -2 \\ 5x + 2y + 3\omega = 0 \\ 3x - 7y + 2\omega = 1. \end{cases}$$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ 2x - y + 4\omega = 0 \\ 5x + 2y + \omega = 2 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} x - y + \omega = 4 \\ 3x + y - 5\omega = 0 \\ x + y - 3\omega = -2 \end{cases}$$

10. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + \omega = 7 \\ y + \omega = 8 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} 11x + 13y + 17\omega = 23 \\ 19x + 17y + 13\omega = 29 \\ 30x + 30y + 30\omega = 51 \end{cases}$$

11. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{\omega}{8} \\ 2x + y - \omega = 30. \end{cases}$$

12. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{\omega-3}{4} \\ x + y + \omega = 15. \end{cases}$$

13. Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2 - 4 & x - 2 \\ (1-x)^2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

14. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ 5x + y = \lambda \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2. \end{cases}$$

15. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda^3, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \mu x - y = 1 \\ x + (\mu + 1)y = -\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

16. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων:

$$\text{i)} \begin{cases} 752x + 481y = 100 \\ 2503x + 9657y = 200 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 17x + 19y = 11 \\ 23x + 13\sqrt{2}y = 29 \end{cases}$$

17. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - \lambda^2 y = \lambda^2 + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

18. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} (\lambda - 1)x + 4y = 1 \\ (\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + (2 - \mu)y = 0 \\ \mu x + (\lambda^2 + 1)y = 1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

19. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - \omega = 0 \\ (\lambda - 1)x + 2y + \omega = 3 \\ 2x + 4y + 2\omega = 5 \end{cases} \quad \mu\epsilon \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

20. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - ay = a \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : ax + y = 1 \quad \mu\epsilon \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του a οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αν είναι γνωστό ότι η τετμημένη του είναι ίση με 1.

21. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : (\alpha + 2)x + (\alpha - 4)y = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x + (\alpha - 2)y = \alpha.$$

- i) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο ευθειών.
- ii) Αν οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο να αποδείξετε ότι το σημείο αυτό δεν μπορεί να ανήκει στην ευθεία $y = x$.

22. Δίνονται οι ευθείες

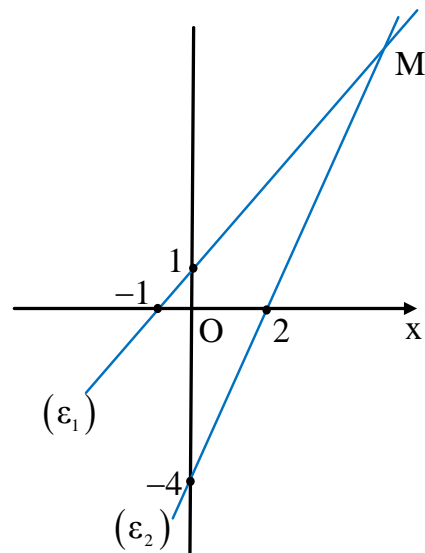
$$\varepsilon_1 : x + 3y = \alpha \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \alpha x + 12y = \beta.$$

- i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .
- ii) Για ποιες τιμές των παραμέτρων α, β οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν;

23. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

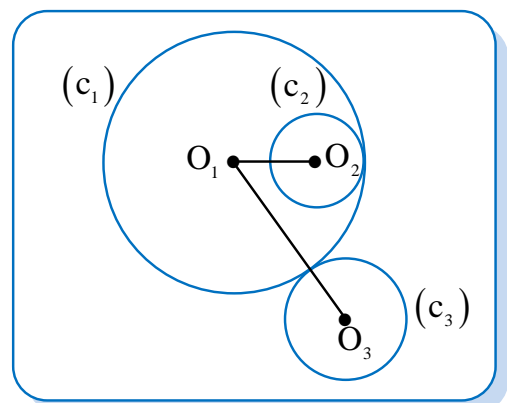
Να βρείτε:

- i) τις εξισώσεις των δύο ευθειών
- ii) το σημείο τομής των δύο ευθειών.



24. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρεις κύκλοι $(c_1), (c_2), (c_3)$ με κέντρα O_1, O_2, O_3 και ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 αντίστοιχα. Οι κύκλοι $(c_1), (c_2)$ εφάπτονται εσωτερικά και οι κύκλοι $(c_1), (c_3)$ εφάπτονται εξωτερικά, έτσι ώστε:

- $(O_1O_2) = 3$
- $(O_1O_3) = 8$
- Το μήκος του (c_1) είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των (c_2) και (c_3) .



Να βρείτε τις ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 των τριών κύκλων.

25. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ 2x + (\lambda - 3)y = \lambda \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις.

26. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ x + (\lambda - 3)y = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
 ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε το σύστημα.

27. Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ 2x + (1 - \beta)y = 2\alpha \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις.

28. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \lambda x + \mu y = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - \mu y = \lambda \\ x + (\lambda - 4)y = \mu \end{cases} \quad \text{με} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ, μ για τις οποίες το πρώτο από τα παραπάνω συστήματα έχει άπειρες λύσεις και συγχρόνως το δεύτερο σύστημα είναι αδύνατο.

29. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ για τους οποίους τα συστήματα

$$\begin{cases} (\kappa - 1)x - \lambda y = 3 \\ \kappa x + y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ -x + \kappa y = 3, \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

30. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = 0 \\ 3x + (\lambda - 5)y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Αν το ζεύγος (x_1, y_1) με $x_1 \neq y_1$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ .

31. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 - 2\lambda \\ x + \lambda y = 2\lambda^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

32. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 8 - \alpha \\ 4x + (\lambda - 4)y = 2\alpha \end{cases}$$

να έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

33. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = \gamma^2 \\ \beta x + y = 2\gamma - \alpha \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του α έτσι, ώστε για κάθε β να υπάρχει ένα τουλάχιστον γ για το οποίο το παραπάνω σύστημα έχει μία τουλάχιστον λύση.

34. Δίνεται η παραβολή

$$y = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

η οποία τέμνει τον άξονα x'/x στα σημεία με τετμημένες -2 και 1 και τον άξονα y'/y στο σημείο με τεταγμένη 4 .

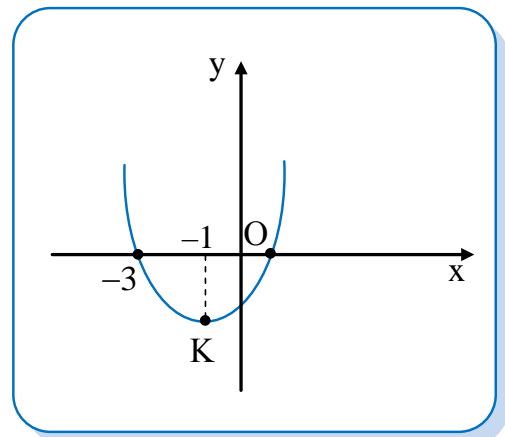
Να βρείτε:

- i) τις τιμές των α , β και γ
- ii) την κορυφή της παραβολής.

35. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια παραβολή με κορυφή το K , η οποία είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\beta = 2\alpha > 0$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii) Αν $K(-1, -2)$, να βρείτε τις τιμές των α , β και γ .



36. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = 2 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

και δύο λύσεις του $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

- i) Να βρείτε την τιμή του λ .
- ii) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2$.

37. Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y το οποίο έχει μοναδική λύση και για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$D_x + D_y = 4D \quad \text{και} \quad 2D_x + 3D_y = 5D.$$

Να υπολογίσετε τους x και y .

38. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$D_x^2 + 4D_y^2 = 4D_x D_y \quad \text{και} \quad D \neq 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $x = 2y$.
- ii) Αν ισχύει επίσης

$$D_x + D_y = 12D,$$

να βρείτε τους x και y .

39. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 2D \cdot D_x,$$

να βρείτε τους x και y .

40. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + 13D^2 \leq 2D(2D_x - 3D_y).$$

Αν οι ορίζουσες D_x, D_y δεν είναι και οι δύο μηδέν, να αποδείξετε ότι:

- i) το σύστημα έχει μοναδική λύση
- ii) $x = 2$ και $y = -3$.

41. Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 \leq 2(D_y + D - 1).$$

- i) Να βρείτε τις ορίζουσες D_x , D_y και D .
- ii) Να λύσετε το σύστημα.



numerica.

A . L i a p i s