

Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 1

Συστήματα

Διαγωνίσματα

numerica.

A . L i a p i s

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

- A1.** Τι ονομάζουμε λύση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ;
- A2.** Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους x, y, z ;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 λέγεται λύση του συστήματος.
- β)** Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.
- γ)** Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ορίζουσα $D \neq 0$, τότε αυτό είναι αδύνατο.
- δ)** Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει άπειρες λύσεις, τότε ισχύει $D = 0$.
- ε)** Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Θέμα Β

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ x + (\lambda - 3)y = 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- B1.** Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , να αποδείξετε ότι $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$.
- B2.** Να λύσετε το σύστημα όταν:
- α)** $\lambda = 1$
- β)** $\lambda = 2$
- B3.** Αν (x, y) είναι μοναδική λύση του συστήματος τέτοια, ώστε $x + y = 0$, να βρείτε την τιμή του λ και τη λύση του συστήματος.

Θέμα Γ

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : ax + y = a \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 4x + 2y = a - 1 \quad \text{με} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Αν οι ευθείες δεν τέμνονται σε ένα σημείο, να αποδείξετε ότι:

α) $a = 2$

β) οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Γ2. Αν οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και $\varepsilon_3 : x + 2y = 3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο και ο αριθμός a είναι ακέραιος, να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x + \kappa, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία

$$\varepsilon : y = x - 3\kappa,$$

η οποία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο A με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του κ .

Δ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Τι ονομάζουμε 3×3 γραμμικό σύστημα;
A2. Τι ονομάζουμε ορίζουσα του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

με αγνώστους x, y ;

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους.
β) Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο αν και μόνο αν $D = 0$.
γ) Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$.
δ) Ένα 3×3 γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
ε) Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση.

Θέμα Β

Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y τέτοιο, ώστε

$$D_x^2 + 9D_y^2 \leq 6D_x D_y.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι

$$D_x = 3D_y$$

- B2.** Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$D_x D_y = D^2 - 1,$$

τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση
β) για $D = 2$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

Θέμα Γ

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda^2 x^2 - \lambda y = 2 \\ (2\lambda + 1)x + (\lambda + 1)y = \lambda^2 - 6, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Αν $(x, y) = (1, -1)$ είναι μία λύση του συστήματος, τότε:

- Γ1.** να βρείτε την τιμή του λ
- Γ2.** να λύσετε το σύστημα
- Γ3.** να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x + \lambda y = \lambda + 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \lambda x + 4y = 2\lambda$$

είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Θέμα Δ

Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} (\kappa + 1)x + (\lambda + 2)y = 2\kappa \\ 2\kappa x + (\kappa + 3)y = \lambda \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\lambda - 2)x - \lambda y = \kappa + 5 \\ (2\kappa + 1)x + (\lambda + 1)y = 3\kappa, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Δ1.** Αν D και D' είναι οι ορίζουσες των παραπάνω συστημάτων, να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.
- Δ3.** Αν $\kappa = 1$ και το πρώτο σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τότε:
 - α)** να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$
 - β)** να λύσετε τα παραπάνω συστήματα.



numerica.

A . L i a p i s