

Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 2

Ιδιότητες Συναρτήσεων

Διαγωνίσματα

numerica.

A . L i a p i s

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

- A1.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Πότε μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο;
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται άρτια;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x) + c, \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.

- β)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x - c), \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

- γ)** Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

- δ)** Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν ούτε ολικό μέγιστο, ούτε ολικό ελάχιστο.

- ε)** Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

- B2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 10.$$

- B3.** Να αποδείξετε ότι

$$(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1} \geq (2x + 1)\sqrt{2x} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 10|x| + 26, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια, ενώ η συνάρτηση g είναι περιττή.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 5$.

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = g(x).$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να γράψετε τον τύπο της f στη μορφή

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο.

Δ3. Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο;
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται περιττή;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x) - c, \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.

- β)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x + c), \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

- γ)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
- δ)** Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.
- ε)** Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x \leq 2 \\ -x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

- B1.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- B3.** Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
- B4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x + 3).$$

Θέμα Γ

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} διέρχεται από τα σημεία $A(1, -3)$ και $B(5, -4)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και περιττή, τότε:

α) να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x) - 2) > 4$$

β) να αποδείξετε ότι

$$f(x^2 - 2|x|) \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα Δ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$g(x) = (f(x))^2 - 6f(x) + 11 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύουν οι σχέσεις

$$f(4) = 3 \quad \text{και} \quad g(0) = 27$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

β) να βρείτε την τιμή $f(0)$

γ) να αποδείξετε ότι $f(g(x)) > -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



numerica.

A . L i a p i s