



Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 3

Τριγωνομετρία

Παράγραφος 3.2

Βασικές Τριγωνομετρικές
Ταυτότητες

Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

16. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{8}}{3} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi,$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

17. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\theta = -\frac{8}{17} \quad \text{και} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

18. Αν ισχύει η σχέση

$$\epsilon\phi\theta = -2 \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ rad.

19. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x τέτοια, ώστε:

i) $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) $\eta\mu x = -\frac{1}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}$

iii) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$.

20. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$x = 5\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad y = 4\eta\mu\theta,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

21. Έστω γωνία α για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{5}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{12}{25}$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha$.

22. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{5},$$

να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$

ii) $\frac{1}{\eta\mu\omega} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

iii) $\eta\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega$.

23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x = \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x$

ii) $\eta\mu^2x \cdot (1 + \sigma\phi^2x) = 1$

iii) $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \eta\mu^2x + \epsilon\phi^2x$.

24. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$

ii) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\phi x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

25. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\eta\mu\alpha \cdot (1 + \epsilon\phi\alpha) + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \sigma\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

26. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\phi^2\theta - \eta\mu^2\theta = \epsilon\phi^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta$

ii) $\sigma\phi^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \sigma\phi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta$.

27. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

28. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\beta} = \frac{\epsilon\phi\alpha}{\epsilon\phi\beta}$

ii) $\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta} = \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta$.

29. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}$

ii) $\frac{\epsilon\phi^2\alpha - 1}{\epsilon\phi^2\alpha + 1} = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

iii) $\frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$.

30. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1)(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $\frac{\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} + \frac{\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha + 1} = \frac{4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{3 - 4\eta\mu^2\alpha}$.

31. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(\eta\mu\chi + \epsilon\phi\chi) \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\phi\chi) = (1 + \eta\mu\chi) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\chi)$

ii) $(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) \cdot (\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi) = \frac{1}{\eta\mu\chi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.

32. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(1 - \epsilon\phi\theta)^2 + (1 - \sigma\phi\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{1}{\eta\mu\theta} \right)^2$

ii) $2\epsilon\phi\theta + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = (\epsilon\phi\theta + 1)^2$.

33. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $1 + \frac{2\epsilon\phi^2\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta} = \frac{1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta}$.

34. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \frac{\eta\mu^2\alpha}{1-\sigma\phi\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\epsilon\phi\alpha} = 1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{ii)} \quad \sqrt{1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = |\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha|.$$

35. Δίνεται γωνία α για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1)(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1) = \frac{2}{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha}$$

$$\text{ii)} \quad |\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha| \neq 1.$$

36. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad (1 + \epsilon\phi\alpha)(1 + \sigma\phi\alpha) = \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad \text{ii)} \quad \frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

37. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x} + \frac{1}{\eta\mu^2x}} = \epsilon\phi x + \sigma\phi x \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{ii)} \quad \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

38. Αν ισχύει η σχέση

$$\epsilon\phi^2\alpha = 1 + 2\epsilon\phi^2\beta,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \epsilon\phi^2\alpha + 1 = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu^2\beta = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

$$\text{iii)} \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1.$$

39. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\phi\beta = 2\varepsilon\phi\alpha$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{3\varepsilon\phi\beta - 2\varepsilon\phi\alpha}{2 + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 - 1.$$

40. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1 + 3\eta\mu^2\beta}$$

να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^2\beta = \frac{2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2 + 3\eta\mu^2\alpha}.$$

41. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\phi^2\alpha = 1 + 2\varepsilon\phi^2\beta$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1 + \varepsilon\phi^2\alpha}{1 + \varepsilon\phi^2\beta} = 2$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$

42. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x = 1 - 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x = 1 - 3\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) η παράσταση

$$\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x - 2\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x + \eta\mu^2x$$

είναι σταθερή, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του x .

43. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



numerica.

A . L i a p i s