



Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 3

Τριγωνομετρία

Παράγραφος 3.4

Οι Τριγωνομετρικές
Συναρτήσεις



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

58. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 3\eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

και

$$g(x) = 3\eta\mu(-x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

59. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

και

$$g(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

60. Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu \frac{\pi}{8}$ και $\eta\mu \frac{\pi}{7}$

ii) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{9}$

iii) $\epsilon\phi \frac{2\pi}{5}$ και $\epsilon\phi \frac{3\pi}{10}$.

61. Έστω δύο γωνίες x_1, x_2 τέτοιες, ώστε

$$\frac{\pi}{12} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4}.$$

Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu 2x_1$ και $\eta\mu 2x_2$

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(3x_1 - \frac{\pi}{4}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(3x_2 - \frac{\pi}{4}\right)$

iii) $\epsilon\phi\left(x_1 - \frac{\pi}{3}\right)$ και $\epsilon\phi\left(x_2 - \frac{\pi}{3}\right)$.

62. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
- iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

63. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2\eta\mu \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .
- iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.

64. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu x - 1, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $-5 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $[0, 2\pi]$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι
$$f(x + \pi) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

66. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε την τιμή $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το 0.

67. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) $0 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iii) ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
- iv) ο αριθμός 2 δεν είναι μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

68. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \sigma\upsilon\nu 2x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$, τότε:

- i) να βρείτε τους α και β
- ii) να αποδείξετε ότι $1 \leq f(x) \leq 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

69. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x + 5, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- i) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$.

70. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \sigma\upsilon\nu x + \beta, \quad x \in [0, \pi]$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς α και β
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- iii) να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < 0$.

- 71.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A < B$ τέτοιο, ώστε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\varepsilon\phi A$ και $\varepsilon\phi B$ να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- i) Να βρείτε την $\varepsilon\phi A$ και την $\varepsilon\phi B$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $A > \frac{\pi}{4}$.
- iii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.
- 72.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\varepsilon\phi A$ και $\varepsilon\phi B$ να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - x - 11 = 0.$$

- i) Να βρείτε το άθροισμα $\varepsilon\phi A + \varepsilon\phi B$ και το γινόμενο $\varepsilon\phi A \varepsilon\phi B$.
- ii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- iii) Αν επιπλέον η γωνία A είναι αμβλεία, να αποδείξετε ότι $B > \frac{\pi}{4}$.



numerica.

A . L i a p i s