Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 4 Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Παράγραφος 4.1 Πολυώνυμα

Ασκήσεις

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha - \beta)x + 1 - \alpha$$

και

$$Q(x) = (\beta + 4)x^3 + (2 - \beta)x^2 + 4(x - 1).$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε:

i) το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι σταθερό

ii) τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι $2^{ου}$ βαθμού

iii) τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

2. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\kappa - 1)x^3 + 4x^2 + \lambda$$

και

$$Q(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\kappa^2 - \kappa)x + 3\kappa$$

να είναι ίσα.

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\mu^3 - \mu)x^4 + (\mu + 1)x^2 + \mu^2 - 1,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το $P(x)$ είναι:

i) το μηδενικό πολυώνυμο

ii) πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού.

4. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x - 2 \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει ρίζα τον αριθμό 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = 1$ να είναι ίση με -2.

5. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3.

Να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β

ii) την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -2$

6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu x - 2 \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\lambda + \mu = 1.$$

ii) Αν η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x)$ για

$$x = 2$$

είναι ίση με $-8P(0)$, να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

7. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\mu^3 - 4\mu)x^3 + (\mu^2 + 2\mu)x + \mu + 1, \quad \text{με} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού, να βρείτε:

α) το πολυώνυμο

$$Q(x) = (x-1) \cdot P(x)$$

β) τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $Q(x)$ παίρνει τη μορφή

$$Q(x) = \alpha x(x-1) + \beta x + \gamma.$$

8. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(x+1) \cdot P(x) = \mu x^3 - x^2 + \mu + 1.$$

i) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Για $\mu = 1$, να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

9. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

ii) $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} = \dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x-3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

10. Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ τέτοια, ώστε:

$$Q(x) = P(P(x)).$$

Αν η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(4,4)$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $Q(x)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(2) - P(1) = 1 \quad \text{και} \quad P(3) - P(2) = 2,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x$

ii) $P(x+1) - P(x) = x$

iii) $1+2+3+\ldots+\nu = P(\nu+1) - P(1)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

12. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ δεύτερου βαθμού για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) = 0$$

και

$$P(x+1) - P(x) = 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$1+3+5+\ldots+(2\nu+1) = P(\nu+1) \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

13. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε

$$P(0)=0 \qquad \text{και} \qquad P(x+1)-P(x)=x^2.$$

i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2, \quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

συναρτήσει του ν.

numerica.

A. Liapis