Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 4 Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Παράγραφος 4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

Ασκήσεις

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

14. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(5x^3+3x^2-8x+12):(x^2+2)$ **ii)** $(x^4-20):(x+2)$

iii) $(x^4-32):(x-2)$ **iv)** $x^6:(x^2-1)^2$.

15. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(8x^3-11x^2+7x-3):(x-2)$

ii) $(6x^5-5x^4-4x^3-2x+7):(3x^2-4x)$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(x^4+1)(x^2+x-2)+4x+3\,.$$

Να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $P(x):(x^2+x-2)$ **ii)** $P(x):(5x^2+5x-10)$

iii) $P(x):(x^4+1)$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=7x^{33}-5x^{22}+3x^{11}-2\,.$$

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου $P(x)$ με το πολυώνυμο:

i) $x+1$ **ii)** $x-1$

iii) x .

18. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

i) $P(x)=x^4+3x^2+5$ **ii)** $Q(x)=-2x^6-4x^2-1$

iii) $R(x)=x^4+x^2-2x+3$.

19. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^{17}-2x^{16}+x^3-7.$$

i) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x-2).$$

ii) Να αποδείξετε το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$ με $\rho<0$.

20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(x^3+4x^2-7x+11):(x-2)$

ii) $(x^4-5x+8):(x+1)$

iii) $(x^5-3x^2):(x-3)$

iv) $(12x^3+5x^2+3x-2):\left(x+\dfrac{1}{3}\right).$

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-3x^2+x+1.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές

$$P\left(1-\sqrt{2}\right) \text{ και } P\left(1+\sqrt{2}\right).$$

22. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$\left(x^5+2x^3+5x^2-8x-11\right):\left(x-\sqrt{2}\right).$$

23. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$$P(x)=x^5-6x^4+2x^3+2x^2-12x+8$$

για $x=3+\sqrt{7}$.

24. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ο αριθμός $x = 1 - \sqrt{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = 3x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + \kappa.$$

25. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1.$$

i) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x) : (x - 1).$$

Στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο

$$x^2 - 2x + 1.$$

iii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : \left(x^2 - 2x + 1\right).$$

26. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3.$$

i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x + 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x + 1)(x - 3)$.

iii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)(x - 3)$.

27. Το διπλανό σχήμα Horner αντιστοιχεί στη διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ το οποίο είναι τρίτου βαθμού με το πολυώνυμο $x - \rho$.

Συντελεστές του $P(x)$

	2α			
α	β	10		

Συντελεστές Πηλίκου Υπόλοιπο

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha \neq 0.$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του ρ.

iii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, να βρείτε την τιμή $P(0)$.

iv) Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) = -20, \quad P(1) = -21 \ \text{και} \ \alpha + 10 = 2\beta,$$

να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

28. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=x^3+\alpha x-2 \qquad \text{και} \qquad Q(x)=x^3+\alpha^2 x-10$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, να αποδείξετε ότι το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$. Ισχύει το αντίστροφο;

29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x)=x^4+\lambda x^3+18x^2+2\lambda x+32$$

με το πολυώνυμο $x-2$ είναι ίσο με 24.

i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x-4$. Ποιο είναι το πηλίκο αυτής της διαίρεσης;

iii) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $(x-4)^2$. Ποιο είναι το πηλίκο αυτό της διαίρεσης;

30. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-2$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$2\alpha+\beta=-3.$$

ii) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-3$ είναι ίσο με 4, τότε:

α) να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

31. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+x^3+5x^2+\alpha x+\beta$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και

$$\upsilon(x)=7x+11$$

είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου $P(x)$ με το πολυώνυμο x^2-4, να βρείτε:

i) τις τιμές $P(2)$ και $P(-2)$

ii) τους αριθμούς α και β

iii) το πηλίκο $\pi(x)$.

32. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και η αριθμητική τιμή του για

$$x=0$$

είναι ίση με -2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο x^2-x.

33. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P^2(2)+P^2(3)=2P(3)-1.$$

i) Να υπολογίσετε τις τιμές $P(2)$ και $P(3)$.

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-2)(x-3)$.

34. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^2+\lambda x+1,$$

όπου λ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του λ

ii) να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$Q(x)=2x^3-5x^2+5x-3.$$

35. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=4x^2-8x+5.$$

i) Να βρείτε το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\frac{\alpha}{2}$, όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\upsilon \geq 1.$$

iii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το υπόλοιπο υ γίνεται ελάχιστο.

36. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-2x^2+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\left(2+\eta\mu^2\alpha\right)\cdot x-\sigma\upsilon\nu^4\alpha,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

ii) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x+1)$$

είναι

$$\upsilon=-3-3\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

iii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του υ.

37. Το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x+\beta$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\beta=-\alpha-1.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

iii) Να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

38. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^4+\beta x^3+1$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε:

i) το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης

$$P(x):(x-1)$$

ii) τους α και β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$(x-1)^2.$$

39. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^4-2x^3+\beta x^2-8x+\gamma .$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x-2)$$

είναι ίσο με 8.

i) Να αποδείξετε ότι

$$16\alpha+4\beta+\gamma=40 .$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x+2).$$

iii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x-1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha+\beta+\gamma=10$

β) $P(x)=(x-1)\cdot\left[\alpha x^3+(\alpha-2)x^2+(\alpha+\beta-2)x+\alpha+\beta-10\right]$.

iv) Να βρείτε τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$.

40. **i)** Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\frac{5x-8}{x^2-5x+4}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-4} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{1,4\}.$$

ii) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$\left(x^3-4x^2+4x-4\right):\left(x^2-5x+4\right)$$

και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^3-4x^2+4x-4}{x^2-5x+4}=x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-4} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{1,4\}.$$

41. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με το $x-3$ αφήνει υπόλοιπο 2. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$Q(x)=P(P(x))-x$$

έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-3$.

42. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x-1)=x^2-3x+2.$$

i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$Q(x)=P(P(x))+\alpha x-1.$$

43. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(x-3)^{2\mu}+(x-2)^{\mu}-1,$$

όπου $\mu\in\mathbb{N}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$(x-2)(x-3).$$

ii) Για $\mu=2$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x):(x-2)(x-3).$$

44. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1,\quad \nu\in\mathbb{N}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

ii) Για $\nu=3$, να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$.

45. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=x^{\nu+2}+2x^{\nu+1}+x^{\nu}-2x-2,\quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο x^2-1.

46. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=x^{\nu+2}-x^{\nu+1}+x^2-3x+2,\quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

numerica.

A. Liapis