Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 4

Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Παράγραφος 4.3

Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

Ασκήσεις

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

47. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+3x^2-8x-4.$$

i) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$.

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

48. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+x^2+x-1.$$

i) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x^2+x)$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

49. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=3x^3-2x^2-6x+4.$$

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

50. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2.$$

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-2)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=x$.

51. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-2x^2+\alpha x-\alpha^2 \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

για το οποίο ισχύει η σχέση

$$P(1)-P(0)=1.$$

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

52. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\lambda^4x^4-5\lambda^2x^2+4,$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$.

ii) Για $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

53. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+4x+2\alpha+\beta$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι ίσο με 3, να βρείτε τους α και β.

ii) Για $\alpha=2$ και $\beta=-5$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

54. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x)=x^4+\alpha x^3-2x+3$$

με το $x-1$ είναι ίσο με 7.

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=4x+3$.

55. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha^2-\beta^2=15.$$

Αν το πολυώνυμο $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$\alpha=-4 \quad \text{και} \quad \beta=1$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

56. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-\alpha x^3+2\beta x^2+x-1,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι 1, να βρείτε τους α και β.

ii) Για $\alpha=3$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

57. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\left(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\right)\cdot x^2-(\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot x+1,\ \ \alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

το οποίο διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 1.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

58. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=x^3-2x^2+\alpha x+5+\beta$$

και

$$Q(x)=x^3+\beta x^2-x+2-\alpha$$

τα οποία έχουν κοινό παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)+Q(x)=0.$$

59. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-8x-8$$

με το πολυώνυμο x είναι

$$\upsilon=\alpha^2+\beta^2-2\alpha-7.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

60. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

με το πολυώνυμο $x - 2$ είναι

$$\upsilon = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 2\beta + 22.$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

61. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \alpha x^3 + x^2 + (\alpha + \beta)x - 1 \quad \text{και} \quad Q(x) = x^3 + \gamma x^2 + 3x + 1,$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να βρείτε τους α, β και γ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ να μην έχει βαθμό.

ii) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x + 1$ είναι 9 και το πολυώνυμο

$$G(x) = P(x) + 27$$

έχει παράγοντα το $x - 2$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -5$

β) να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητά της Ευκλείδειας διαίρεσης

γ) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 3$.

62. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + \alpha x^2 + \beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - x$ είναι το πολυώνυμο $10x + 1$, τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : x^2(x - 2)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης

iii) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

63. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 4x^2 + \alpha x + \beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν τα υπόλοιπα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x+1$ και $x-2$ είναι 16 και -17 αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) να αποδείξετε ότι

$$P(x) + (2x+5)^2 = (x^2+4)^2$$

iii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

64. Το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta$$

έχει παράγοντες τα πολυώνυμα

$$x-1 \text{ και } x+3.$$

i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

iii) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)$ έτσι, ώστε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : Q(x)$$

να είναι πολυώνυμα $x^2 - 7$ και $2x - 14$ αντίστοιχα.

65. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ **ii)** $(x+3)^4 - 5(x^2+6x+9) + 4 = 0$.

66. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$. Αν η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,0)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$P(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$\left(P(x) + x^3\right)^2 + 2 = 3P(x) + 3x^3.$$

67. Δίνεται το πολυώνυμο
$$P(x)=(x^2-2x)(x^2-2x+3).$$

i) Να λύσετε την εξίσωση
$$P(x)=4.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο
$$x-P(1+\sqrt{2})+3+\sqrt{2}.$$

68. Δίνεται το πολυώνυμο
$$P(x)=2x^3+2x^2+(\eta\mu\alpha-4)x-\eta\mu\alpha,\quad \mu\varepsilon\quad \alpha\in(0,2\pi).$$

i) Να υπολογίσετε την τιμή $P(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ έχει ακριβώς τρία κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει η σχέση
$$P(\eta\mu\alpha)=0.$$

69. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ τέτοια, ώστε
$$P(x)=P(2-x)\ \text{ για κάθε }\ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $P(x)$ δεν είναι γνησίως μονότονη.

ii) Αν ισχύει η σχέση
$$P(0)=2,$$
τότε:

α) να αποδείξετε ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$

β) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο x^2-2x.

70. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο x^3-9 αφήνει υπόλοιπο $\upsilon(x)$ ίσο με το πηλίκο $\pi(x)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$P(x)=0$$
έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

71. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

i) $x^3+5x^2+5x-3=0$ **ii)** $x^4-4x^2-x+2=0.$

72. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

i) $2x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{2}x-1=0$ **ii)** $21x^3+70x^2+14x-21=0.$

73. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

i) $x^3+7x^2-5=0$ **ii)** $x^5+4x^3-3x^2+x+2=0.$

74. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^5-5x^4+7x^3-6x^2+11x-6.$$

i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει αρνητική ρίζα.

ii) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

75. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+2^{\alpha}\cdot x^2+x+1$$

όπου α ένας φυσικός αριθμός. Αν η εξίσωση

$$P(x)=0$$

έχει ακέραια ρίζα, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του α

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

76. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=4x^3+\alpha x^2+\beta x+1,$$

όπου α, β σταθεροί ακέραιοι αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$\alpha=-1 \quad \text{και} \quad \beta=-4$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

77. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 7x + 2,$$

όπου α, β σταθεροί θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, να βρείτε:

i) τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$

ii) τους αριθμούς α και β

iii) τις ρίζες του $P(x)$.

78. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί κ και λ τέτοιοι, ώστε ο αριθμός $5\kappa + 8$ να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^5 + \lambda x^4 + x + 2 = 0.$$

i) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

ii) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

79. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$$

όπου α, β σταθεροί ακέραιοι αριθμοί. Αν οι αριθμοί $\alpha + 1$ και $\beta - 1$ είναι ρίζες του πολυωνύμου, διαφορετικές μεταξύ τους, τότε:

i) να βρείτε τις τιμές των α και β

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

80. Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με ακέραιους συντελεστές για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) + Q(0) = 5 \quad \text{και} \quad P(0) - Q(0) = 1.$$

i) Να βρείτε τους σταθερούς όρους των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$P^2(x) + Q^2(x) = 0$$

έχει το πολύ δύο ακέραιες ρίζες.

81. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^3 - \alpha x^2 - \beta x + 3,$$

όπου α και β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύει η σχέση

$$P(2) = 0,$$

τότε:

i) να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β δεν είναι ακέραιος

ii) να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε $\beta = 4\alpha$.

82. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές για το οποίο ισχύει η σχέση

$$P(1)\cdot P(2) = 3.$$

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε

$$(\rho - 1)(\rho - 2)\Pi(1)\Pi(2) = 3$$

ii) ο αριθμός ρ δεν είναι ακέραιος.

83. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = x(x+1)(x-2).$$

84. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2x-1)^3(5x-1)^2(x^2+1)^5.$$

85. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-5)(-3x+17)(x^2-6x+9)^3.$$

86. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (3x+1)^2(-2x+1)^5(x^2-x)^8.$$

87. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (9-x^2)(x^2-3x-4)(x^2-4x+5).$$

88. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x-2)(3x-7)(8-x) < 0$ **ii)** $(4x+1)(x-3)^2(x^2-10x+25)^3 > 0.$

89. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(3x-4)^5\cdot(3x-6)^7\leq 0$ **ii)** $(x-2)^4\cdot(5x+1)^7\geq 0.$

90. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)>0$ **ii)** $(x^2+2x-3)(x^2+2x+2)<0$.

91. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3-x^2-4x+4<0$ **ii)** $x^3-3x^2+x-3>0$.

92. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^{10}-8x^7<x^3-8$ **ii)** $(x^2+x)^2<2(x^2+x)$.

93. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+3x^2-3x+4>0$ **ii)** $x^3<5x^2-7x+3$.

94. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3-4x^2+3x+2>0$ **ii)** $x^5\leq 3x^4-x+3$.

95. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x+2)(2-x)(x-1)^2>0$ **ii)** $(|x|+1)(x^2-3x+2)<0$.

96. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(1-3x)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9)\leq 0$

ii) $(8+2x-x^2)(x^2-2x+1)<0$.

97. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(3-x)(-x^2+6x-5)(x^2+5x)>0$

ii) $(3-x)^{11}\cdot(-2x^2+8x)\cdot(x+1)^{10}\cdot(x^2-4x-5)\leq 0.$

98. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει
$$1 - x > 1 - x^2 > 1 - x^3.$$

99. **i)** Να αποδείξετε ότι
$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση
$$|x - 2| + |x + 2| = 2|x|.$$

100. Δίνεται το πολυώνυμο
$$P(x) = (\lambda - 1)x^3 + (\lambda + 1)x + 2\lambda - 3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Για $\lambda = 2$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ να παίρνει την μορφή $x^2(x - \alpha) + x(x + \beta) + x + 1$.

iii) Για $\lambda = 3$, να λύσετε την ανίσωση
$$P(x) < 3.$$

101. Δίνεται το πολυώνυμο
$$P(x) = x^4 - 9x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$$
το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1 και διαιρούμενο με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 6.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 25$ και $\beta = -21$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

102. Δίνεται το πολυώνυμο
$$P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3 \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
το οποίο έχει ως ρίζα τον αριθμό 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x - 2)$ είναι ίσο με 1.

i) Να βρείτε τις τιμές των α, β.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

103. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-\alpha x^2+2\alpha x-8.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζα τον αριθμό 2.

ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει, εκτός από τον αριθμό 2, δύο ακόμη πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 τέτοιες, ώστε $\rho_1+\rho_2=5$, να βρείτε την τιμή του α και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

104. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(1)+4P(0)=0$$

και

$$\frac{P(-1)}{3}=\frac{-P(1)}{5}=4,$$

τότε:

i) να βρείτε τις τιμές $P(1)$, $P(0)$ και $P(-1)$

ii) να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ

iii) να αποδείξετε ότι $P(x)+4(2x+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

105. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-4$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-2$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$2\alpha+\beta+2=0.$$

ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$.

iii) Αν $\alpha=-5$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)<0.$$

106. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-6x^3+8x^2+2x-1.$$

i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το x^2-4x+1.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

107. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3-11x^2-4x+\alpha$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2-6x+\beta$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

108. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+\alpha x^3+(\alpha+1)x^2+2x+\alpha+2,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο x^2+x και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια.

iii) Για $\alpha=-2$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

109. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του x^2-1, τότε:

i) να βρείτε τις τιμές των α και β

ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

iii) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

110. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^8-6x^7+9x^6-x^2+\alpha x+\beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x):(x^6-1)$$

και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να βρείτε τους α και β, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

iii) Για $\alpha=6$ και $\beta=-9$, να βρείτε:

α) τις ρίζες της εξίσωσης

$$P(x)=0$$

β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

111. Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-5x+6$$

διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(2,0)$.

i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

112. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+16.$$

i) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$. Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x+1$;

iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=4$.

113. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x+2,$$

όπου α, β σταθεροί θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει θετικές ρίζες.

ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=10$

β) να λύσετε την ανίσωση $P(x)<2$.

114. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-\alpha x^2+4x-2,$$

όπου α σταθερός ακέραιος αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση

$$P(x)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

115. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-3$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x+2$.

i) Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β δεν είναι ακέραιος.

ii) Αν επιπλέον το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x):(x-1)$$

είναι 6, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{9}{2}$ και $\beta=\dfrac{7}{2}$

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

γ) να λύσετε την ανίσωση $P(x)<6$.

numerica.

A. Liapis