Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 4

Πολυώνυμα -
Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Διαγωνίσματα

numerica.

A. Liapis

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Δηλαδή, $\upsilon = P(\rho)$.

Α2. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Α3. Πότε λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν ένα πολυώνυμο έχει την ίδια τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι σταθερό πολυώνυμο.

β) Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος με τον μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

γ) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

δ) Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

ε) Αν υψώσουμε τα μέλη οποιασδήποτε εξίσωσης στο τετράγωνο, τότε η εξίσωση που προκύπτει δεν μπορεί να έχει και άλλες ρίζες, εκτός από τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Θέμα Β

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$(x^2+x+1)P(x) = \lambda x^4 + (\lambda-3)x^3 + (\lambda-1)x^2 - x + 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Β1. Να βρείτε το βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ.

Β1. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β3. Για $\lambda = 0$, να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-2} \leq 0$.

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+10$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$ και διαιρούμενο με το $x-3$ αφήνει υπόλοιπο –8.

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha=-6 \quad \text{και} \quad \beta=3.$$

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=(x+1)(x+3).$$

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση

$$P(x)>0.$$

Θέμα Δ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\mu x^3-35x^2+(5\mu-4)x-5$$

όπου μ θετικός ακέραιος αριθμός. Αν το πολυώνυμο έχει ακέραια ρίζα, τότε:

Δ1. να αποδείξετε ότι $\mu=6$

Δ2. να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$

Δ3. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<25x-5x^2$.

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Α2. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

β) Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x και αντιστρόφως.

γ) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

δ) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$.

ε) Κάθε ακέραιος ρ ο οποίος είναι διαιρέτης του σταθερού όρου μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης.

Θέμα Β

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3-9x^2+3\lambda x-\lambda \quad \text{με} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

το οποίο διαιρείται με το $x-2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$.

Β2. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται και με το $(x-2)^2$.

Β3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

Θέμα Γ

Η εξίσωση

$$x^3 + 3x^2 + \alpha x - 1 = 0,$$

όπου α σταθερός ακέραιος αριθμός, έχει ρίζα των αριθμό $4 + \alpha$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α.

Γ2. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Γ3. Να υπολογίσετε τη γωνία $\theta \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi^3\theta + 3\varepsilon\varphi^2\theta - 3\varepsilon\varphi\theta - 1 = 0.$$

Θέμα Δ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 - 4x$ αφήνει υπόλοιπο $4x + 1$.

Δ1. Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x) + (4x - 1)(x^2 + 1) = Q^2(x).$$

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) < 0.$$

numerica.

A. Liapis