

# Άλγεβρα Β' Λυκείου



Κεφάλαιο 5

Εκθετική και Λογαριθμική  
Συνάρτηση


Παράγραφος 5.1

Εκθετική συνάρτηση

Ασκήσεις

**numerica.**

A . L i a p i s





## Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$f(x) = 4^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 2^{x-1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 27^{x+4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $2^{x+1} = 32$

ii)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

iii)  $8 \cdot 3^x = 27 \cdot 2^x$

iv)  $9^{x-2} = 3^{4x+1}$ .

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

ii)  $3^{2x+2} + 8 \cdot 3^x = 1$ .

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $2^{x^2+8} = 8^{2x}$

ii)  $\left(\frac{4}{5}\right)^{4x-9} = \left(\frac{5}{4}\right)^{9x-4}$

iii)  $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$

iv)  $9^{2x} = 3$ .

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-2} = \left(\frac{25}{16}\right)^{x+4}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{4^x + 10^x}{2} = 5^{2x}$$

$$\text{iii)} \quad 2^x - 9\sqrt{2^x} + 8 = 0$$

$$\text{iv)} \quad \frac{8^x + 11 \cdot 2^x}{13 \cdot 4^x + 8} = \frac{1}{2}$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad e^x + e^{-x} = 2$$

$$\text{ii)} \quad 2^x - 2^{-x} = \frac{3}{2}$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$$

$$\text{ii)} \quad 2^x + 2^{-x} = 2^{2x+1}$$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 2^x - 3^{x+1} = 3^x - 2^{x+3}$$

$$\text{ii)} \quad 5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$$

10. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} 7^x + 2^y = 57 \\ 7^x - 2^y = 41 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 3^{2x-y} = 81 \cdot 3^{2x+y} \\ 5^{x+y} = 5 \cdot 25^{y+1} \end{cases}$$

11. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = 1 \\ (x+y)^{x-y} = 3 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$$

12. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} 2 \cdot 8^x = 4^y \\ 9^{2x} = 27 \cdot 3^{9-4y} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 9^x \cdot 9^y = 27 \\ 9^x + 9^y = 12 \end{cases}$$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^x - 2^y = 17 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 3^x - 2^{y+4} = 17 \\ 2^y - 3^{x-3} = 1. \end{cases}$$

14. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \sqrt{3^x} - 2^y = 1 \\ 3^x - 4^y = 17 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20 \\ 2^y \cdot 5^x = 50. \end{cases}$$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad 2^{4x-5} < 8$$

$$\text{ii)} \quad 7^{1-x} < 1$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$$

$$\text{iv)} \quad 5^{x^2+1} \geq 25^x.$$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{x^2} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2x}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{10}{11}\right)^{1-|x|} < 1,21$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-4} < 9$$

$$\text{iv)} \quad 32^{\frac{1}{x}} < \sqrt{2^x}.$$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$$

$$\text{ii)} \quad 5 \cdot 3^{x-1} < 5^x.$$

18. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{x-1}{4^x - \sqrt{2}}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \sqrt{1-e^x}.$$

19. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = 2^{3x} + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 5.$$

**20.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha + 3}{2}\right)^x.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$ .
- ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$  και είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii) Για  $\alpha = 7$ , να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x) + 5 = 6f(x).$$

**21.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\eta \mu x}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{e} \leq f(x) < e \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ευθεία

$$y = \sqrt{e}.$$

**22. i)** Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

- ii) Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία οι αριθμοί

$$e^{4x}, \quad e^{6x}, \quad e^{9x}$$

είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**23.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ισχύει το αντίστροφο;

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha + 5}{4}\right)^x.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  είναι εκθετική συνάρτηση.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Για  $\alpha = 7$ , να λύσετε την εξίσωση

$$f(3) - 13f(2x) + 39f(x) = 27.$$

25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση  $e^{x+1} + x < 0$ .

26. Δίνεται εκθετική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $M(2, 4)$ , τότε:
  - α) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$
  - β) να λύσετε την ανίσωση  $f(x+1) < 8$ .

27. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\upsilon\alpha}{1 + \sigma\upsilon\upsilon\alpha}\right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$3f(1) = f(0).$$

28. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) - f(y) = \frac{2(e^x - e^y)}{(e^x + 1) \cdot (e^y + 1)} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

iii) Να λύσετε την ανίσωση  $f(2x) < f(x)$ .

29. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4^{x^{\frac{1}{2}-1}} - 2^{x^{\frac{1}{2}-2}} - 3, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

i) Να βρείτε τις τιμές  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) \leq 0.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 2.$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 1 \text{ για κάθε } x < 2.$$

iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$3^x + 4^x = 5^x.$$



**31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**ii)** Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x + 3^x = 5^x.$$

**iii)** Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

**iv)** Να λύσετε την ανίσωση

$$2^x + 3^x < 2 \cdot 5^x.$$

**32.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = 2^x + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**i)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τις ευθείες

$$x = 2 \text{ και } x = 3.$$

**ii)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**iii)** Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x = 11 - x.$$

**iv)** Να λύσετε την ανίσωση

$$2^x < 6 - x.$$

**33.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha \neq \beta$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i) } \left[ f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^2 > 0 \qquad \text{ii) } f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

**34.** Δίνεται εκθετική συνάρτηση  $f$  με βάση το θετικό αριθμό  $a \neq 1$ .

**i)** Να αποδείξετε ότι

$$f(2) - f(1) < f(3) - f(2).$$

**ii)** Αν ισχύει η σχέση

$$f(2) = 2f(1),$$

τότε:

**α)** να βρείτε την τιμή του  $a$

**β)** να λύσετε την εξίσωση  $f(2x) = 64$ .

**35.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2^{2x+1} + 8, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 17 \cdot 2^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

**i)** τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$

**ii)** τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

**36.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και

$$g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**i)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

**ii)** Με τη βοήθεια του ερωτήματος **i)** να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $\varepsilon\varphi x = e^x$  στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

37. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = e^x + e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2 \sin x.$$

38. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = (4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (4 + \sqrt{15})^x + \frac{1}{(4 + \sqrt{15})^x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2.$$

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

39. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{5 - 2^x - 2^{2-x}}$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία  $y = 1$ .

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα, ούτε γνησίως φθίνουσα.

v) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ολικό ελάχιστο.

**40.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = e^{|x|} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .
- ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .
- iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^{|x|} = \eta \mu^2 x$$

είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ .

**41.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = e^{|x|+x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστη τιμή.





**numerica.**

A . L i a p i s