



Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 5

Εκθετική και Λογαριθμική
Συνάρτηση


Παράγραφος 5.3

Λογαριθμική συνάρτηση

Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s



Προτεινόμενες Ασκήσεις

64. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - 4).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log(x + 1).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 3.$$

66. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2e^{2x} - e^x + 2).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon : y = 3x$.

67. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2\ln x, \quad x > 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 + \ln x < x.$$

68. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(\ln x)}}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}.$$

69. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \ln|e^x + x - 1|.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- iv) Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \begin{cases} \ln(e^x + x - 1), & x > 0 \\ \ln(1 - x - e^x), & x < 0. \end{cases}$$

70. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \ln(x-1) = 2\ln 3 \qquad \text{ii) } \ln x + \ln(2-x) = 0.$$

71. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \ln(x^2 - x) = 2\ln 2 + \ln(x-1) \qquad \text{ii) } \ln(x^2 - 1) + 2\ln 3 = \ln(18x - 17).$$

72. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \log x + \log(x+1) = 2 - \log 5 \qquad \text{ii) } (\log x)^2 + 6 = 10\log \sqrt{x}.$$

73. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln\left(x + \frac{3}{x}\right) = 2 \ln 2 + \ln x$

ii) $\frac{1}{2} \log(x-1) + \log \sqrt{x+2} = \log 2.$

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{\log x - 1}{\log x} + \frac{\log x + 3}{\log x + 1} = 2$

ii) $\log(2x) = \frac{\log 5}{\log x}.$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln(2^x + 2) = 2x \ln 2$

ii) $\log(\log x - 1) = 0.$

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(10^x + 1) = \log 2 - x$

ii) $2 \ln(x+2) + \ln x^2 = 0.$

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln(9 - 2^x) = (3 - x) \cdot \ln 2$

ii) $\ln(4 \cdot 3^x - 1) = (2x + 1) \cdot \ln 3.$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^{1+\ln x} + e^{2 \ln(x-1)} = 2e + 1$

ii) $\ln(2^x + 3^x) + \ln 9 = x \ln 3 + \ln 15$

iii) $x^{\log x - 1} = 100$

iv) $\frac{2}{\ln x} + \frac{1}{\ln x - 1} = 2.$

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log x = \ln x$

ii) $x^{1-\log x} = 0,01.$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x = 5$

ii) $3^x = 4^{3x-1}$

iii) $81^x + 8 = 9^{x+1}$

iv) $4e^{-x} = 4 - e^x.$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

ii) $10^x - 3\sqrt{10^x} + 2 = 0.$

82. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log 2 + \log(x + 1) = 1 + \log(2x - 7) - \log(x - 3)$

ii) $\frac{1}{2x} \log 3 + \log 6 = \log\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$ iii) $\frac{\log(101 - 10^x)}{2 - x} = 1.$

83. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(99 + \log(x - 1)) = 2$

ii) $x^{\ln x} = e^2 x.$

84. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^{1+\ln x} = ex$

ii) $\frac{\ln \sqrt{x+3}}{\ln \sqrt[3]{x+1}} = 3.$

85. Να βρείτε τον θετικό αριθμό θ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\log_2 \theta + \log_4 \theta + \log_8 \theta = 11.$$

86. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$\ln(2\eta\mu x) + \ln(2\sigma\upsilon\eta x) = 0.$$

87. i) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση

$$\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$5^{\log x} = 50 - x^{\log 5}.$$

88. Δίνεται η εξίσωση

$$\ln x \cdot \ln ex = \kappa \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της παραπάνω εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του κ .

ii) Για $\kappa = 12$, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

89. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log x - \log y = 4 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \ln x - \ln y = 1. \end{cases}$$

90. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1. \end{cases}$$

91. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log(y - x) = 0 \\ 2^x \cdot 5^y = 10 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^x + 8 \cdot 2^{-y} = 10. \end{cases}$$

92. Έστω οι αριθμοί $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha^2 \geq 10\beta \quad \text{και} \quad \beta^2 \geq 10\alpha.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad 2 \log \alpha \geq 1 + \log \beta \geq 2\sqrt{\log \beta}$$

$$\text{ii)} \quad \log \alpha + \log \beta \geq 2$$

$$\text{iii)} \quad \log \alpha \cdot \log \beta \geq 1.$$

93. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad 2\sqrt{\log 11 \cdot \log 9} < \log 11 + \log 9 < 2 \quad \text{ii)} \quad \log 11 < \log_9 10.$$

94. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} < 2$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log \pi} > 4.$$

95. Να αποδείξετε ότι

$$\text{i)} \quad 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

ii) αν α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha\beta = 100$, τότε ισχύει η σχέση

$$(\log \alpha)^2 + (\log \beta)^2 \geq 2.$$

96. Έστω α, β δύο πραγματικοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha > 2 \quad \text{και} \quad \beta > 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1 \qquad \text{ii)} \quad \ln(\alpha + \beta) < \ln \alpha + \ln \beta.$$

97. Να αποδείξετε ότι

$$2 \log(1 + \alpha^3) < 3 \log(1 + \alpha^2) \quad \text{για κάθε} \quad \alpha > 0.$$

98. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad 7^x > 8 \qquad \text{ii)} \quad 2^x < 3^{x-1}.$$

99. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \log(3x - 5) > 1 \qquad \text{ii)} \quad \ln(2x - 3) < 0.$$

100. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \log^2 x > \log x + 2 \qquad \text{ii)} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(x-1)} > 1.$$

101. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad (\log x)^2 < \log x \qquad \text{ii)} \quad \log(9 - x^2) < \log 8x.$$

102. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \ln^2 x \geq \ln x + 2 \qquad \text{ii)} \quad \left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 2} < e^2.$$

103. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - (1 + \log \alpha)x + \log \alpha = 0$$

έχει δύο ρίζες τέτοιες, ώστε η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

104. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(4-x)$ ii) $f(x) = \ln(2^x - 16)$.

105. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
- iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

106. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι σταθερή.
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

107. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι $f(1) + f(2) + \dots + f(99) = \ln 100$.

108. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\ln^2 x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

109. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\sqrt{\log x} - \log \frac{1}{x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 4.$$

110. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x \ln x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2\sqrt{x}.$$

111. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\ln x^2 - \ln^2(-x)$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 9.$$

112. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x+2) + f(x) = 0.$$

113. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right),$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του a
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R}
- iii) να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \ln 2.$$

114. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log x + \log(x^2 - 4x + 4).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
- iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2 - \log \frac{100}{3}.$$

115. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 + e^{-x}).$$

Να βρείτε:

- i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία

$$y = x.$$

116. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln x \cdot (\ln x + \alpha) \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο με τετμημένη e^2 , να βρείτε την τιμή του α .
- ii) Για $\alpha = -2$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = -1.$$

117. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln^4 x + \ln^2 x \cdot (\alpha - 2 \ln x), \quad x > 0$$

και το σημείο $M(e^2, 4)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (\ln^2 x - \ln x)^2 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

118. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{x}{1 + x}.$$

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $y \in B$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση την

$$x = g(y).$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(g(y)) = y \quad \text{για κάθε } y \in B.$$

119. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 2 \ln^2 \alpha \cdot x^3 - 3 \ln \alpha \cdot x^2 + x - 1,$$

όπου α σταθερός θετικός αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα **i)** να βρείτε:

α) το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 3)$

β) τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 7x - 1$.

120. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{\ln(1-x)}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- iv) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

121. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- ii) για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$f(x) = y$$

έχει μοναδική ρίζα

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

122. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \frac{4 - 2^x}{4 + 2^x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(1)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2\ln 3 = \ln 7$.

123. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 4e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{x-1}{4}, \quad x \in (1, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g
- iii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

124. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1, \quad x > 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι:
 - α) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
 - β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 0.$$

125. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

126. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\log \frac{11x}{x+1} \right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 0.$$

127. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 - e^x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iv) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- v) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = x.$$

128. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(25^x + 5) - x \ln 5 - \ln 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,0)$.
- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

129. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\ln x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - ii) Να λύσετε την εξίσωση
- $$f(x) = 0.$$
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iv) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e^2)$ και $f(e)$.
 - v) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$\ln 2 < f(x) < 1.$$

130. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^{\ln \sqrt{x}}}, \quad x > 0.$$

- i) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία

$$y = e.$$

131. Δίνεται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$$

και

$$g(x) = \ln(e^x - 1).$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζονται οι παραπάνω συναρτήσεις.
- ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινά σημεία.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 2g(x) + \ln 2.$$

132. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 - \ln x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < \ln 5 - \ln 2.$$

133. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(\ln x) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(\ln x^3 - 2)$$

- i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + g(x) = 0.$$

- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < g(x).$$

134. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\ln x} - \frac{1}{2}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \frac{1}{2}$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln \sqrt{x}$.

135. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\sin x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- ii)** δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$
- iii)** η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

136. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)\ln x, \quad x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- ii)** η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

137. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x \cdot \ln x^2.$$

- i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- ii)** Να αποδείξετε ότι
$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in A.$$
- iii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
- iv)** Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x) = \frac{1}{4}f(2), \quad x \in (0, \pi).$

138. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in (0, \pi).$$

- i)** Να αποδείξετε ότι
$$f(x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \pi).$$
- ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή.
- iii)** Να λύσετε την εξίσωση $4f^2(x) = \ln(\eta\mu^2 x).$



numerica.

A . L i a p i s