Άλγεβρα Β' Λυκείου

Ασκήσεις για Επανάληψη

numerica.

A. Liapis

1. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases}(\alpha+1)x+y=\alpha^2+\alpha\\ \alpha x+y=\alpha^2+1, \qquad \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x,y).

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το άθροισμα

$$x^2+y^2$$

γίνεται ελάχιστο.

2. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases}\lambda x+(1-\lambda)y=1\\ (1+\lambda)x+\lambda^2y=\lambda\end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases}4x+\lambda^2y=5\lambda-8\\ (\lambda-1)x+(\lambda+1)y=6, \quad \lambda\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

i) Αν είναι D και D' οι αντίστοιχες ορίζουσες των παραπάνω συστημάτων, να υπολογίσετε το άθροισμα $D+D'$.

ii) Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$D+D'=1,$$

να αποδείξετε ότι τα παραπάνω συστήματα είναι ισοδύναμα.

3. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2+D_y^2=2D(D_x-D_y-D).$$

Αν είναι $D_x\neq D_y$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση

ii) να βρείτε τη λύση του συστήματος.

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=5|x-2|+3x+4, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2-2x+3,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0=1$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=g(x).$$

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-4x+7,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή

$$f(x)=(x-p)^2+q,\quad x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x)=x^2,\quad x\in\mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=2+x+f(f(x)) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2-g(x))>0$.

8. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(f(x))-f(x)=-\frac{x}{4} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $4f(x-1)>x-1$.

9. Δίνεται η εξίσωση

$$2\alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 2\beta\sigma\upsilon\nu^2 x = \beta + \gamma$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{4}$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \gamma = -\beta$.

ii) Αν ο αριθμός π δεν είναι λύση της δοθείσας εξίσωσης, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\beta \neq 0$

β) να λύσετε τη δοθείσα εξίσωση.

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu^3 x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$.

12. Για κάποια γωνία $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = -\frac{7}{8}$.

i) Να βρείτε το συνα.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ έχει λύση.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=3\eta\mu x, \quad x\in[0, 2\pi].$$

i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=1$.

iv) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{7\pi}{10}\right)$ και $f\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu 2x, \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 4)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, -8\right)$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=6$

ii) να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f

iii) να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=1$, στο διάστημα $[0,2\pi]$.

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(\alpha\beta+2)\eta\mu(\beta\pi x), \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου $\alpha, \beta\in(0, +\infty)$.

Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή -3 και περίοδο 4, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

iii) να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,8]$.

17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 5\eta\mu(\pi - 2x) + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

με $x \in [0, \pi]$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4\eta\mu 2x,\ \ x \in [0, \pi]$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

iii) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να λύσετε την ανίσωση $2 + f(x) < 0$.

18. Έστω γωνία $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια, ώστε

$$4\varepsilon\varphi^2 2\alpha - 5\varepsilon\varphi 2\alpha - 6 = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

ii) Να υπολογίσετε την εφα.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)\eta\mu(x + \alpha) = -\eta\mu(x - \alpha).$$

19. **i)** Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$1 - \eta\mu 2x = \sigma\varphi^2 x\left(1 + \eta\mu 2x\right).$$

20. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 5x^4 + 62x^3 + 26x^2 + 29x + \alpha$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 12$.

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα **i)**, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+1.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha>0$ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2-\alpha x+1$.

iii) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων δευτέρου βαθμού.

22. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^{100}+\alpha x+\beta$$

με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=-1$.

ii) Να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να διαιρείται με το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

iii) Για $\alpha=-100$ και $\beta=99$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x):(x-1)^2$$

iv) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\nu\in\mathbb{N}^*$ για την οποία η διαίρεση

$$P(x):(x-1)^\nu$$

είναι τέλεια.

23. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το x δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το $x-\alpha$ δίνει πηλίκο x^2+5x.

i) Να αποδείξετε ότι $P(\alpha)=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$P(x)=x^3+(5-\alpha)x^2-5\alpha x+2.$$

iii) Αν επιπλέον το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-\beta$ δίνει πηλίκο x^2+x-8, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(\beta)=2-8\beta$

β) να βρείτε τις τιμές των α και β

γ) να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + (3 - 2\alpha)x - 2\beta$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 2.

i) Να βρείτε τον αριθμό β.

ii) Αν επιπλέον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2 με

$$\rho_1 < 2 < \rho_2 \quad \text{και} \quad \rho_1 + \rho_2 = 4,$$

τότε:

α) να βρείτε τον αριθμό α

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

25. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2.$$

i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$P(x) = (\alpha x^2 + x - \beta)^2 + (\alpha x + \gamma)^2.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

26. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = -x^4 + x^3 + 4x^2 + \alpha x + \beta, \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

i) Να εκτελεσετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - x + 1)$

και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης αυτής.

ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β, έτσι ώστε το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης να είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 2x - 3$.

iii) Για $\alpha = -3$ και $\beta = 2$, να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) > (2x - 3)(x^2 - x + 2).$$

27. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x - 2)^{2\nu} - (x - 1)^{2\nu} + 2x^2 - x - 3$$

και

$$Q(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$$

όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x - 2$.

ii) Να γράψετε το πολυώνυμο $Q(x)$ ως γινόμενο τριών πρωτοβάθμιων παραγόντων της μορφής $x-\rho$.

iii) Να αποδείξετε ότι μόνο ένας από τους τρεις παράγοντες του $Q(x)$ είναι παράγοντας και του πολυωνύμου $P(x)$.

iv) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):Q(x)$.

28. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x)=\alpha x^3+\alpha x^2-(5\beta+1)x+(\beta-5)$$

με α, β ακέραιους αριθμούς και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(-1,8)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\beta=2$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)=0$, να βρείτε:

α) τον αριθμό α

β) τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

29. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3+\alpha x^2+(\eta\mu\beta)\cdot x+2+\sigma\upsilon\nu\beta$$

το οποίο έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές.

i) Να αποδείξετε ότι $P(0)=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $P(-3)\cdot P(-4)\cdot P(-5)\neq 0$.

iii) Αν η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ακέραια ρίζα ρ, τότε:

α) να βρείτε το ρ και το α

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $P(4,2)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=5$.

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>2$.

31. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+2\alpha+4,$$

το οποίο έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x-2$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=2^x+2^{-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)\geq 2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=4\sigma\upsilon\nu^2 x-2.$$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=e^x+e^{-x} \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f, το οποίο να βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

iii) Να λύσετε τη εξίσωση

$$f(x)=\frac{2}{x^2+1}.$$

34. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^x+x+1 \quad \text{και} \quad g(x)=2e^{-x}+x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2-3x)<2.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha x}-2^x-x,\ \ x\in\mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}+x^2>2+2^{-x^2}.$$

36. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad g(x)=\left(2-f(1)\right)^x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) $g(x)>f(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii) Αν επιπλέον $f(1)=\frac{3}{2}$, να λύσετε:

α) την εξίσωση $3^x\left(g(x)+g(x-3)\right)=4$

β) την ανίσωση $f\left(3-2f(x)\right)<1$.

37. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(ex+1).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)<f(x+1)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(1+\eta\mu 2x)=f(1+\sigma\upsilon\nu x)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(x-1).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^x)+f(e^x-2)=3\ln 2$$

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(e^x+e^2+1)-f(e^x+1)\geq \ln 2.$$

39. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-(\ln\alpha+5)x^2+(5\ln\alpha+6)x-6\ln\alpha \quad \text{με} \quad \alpha>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$.

ii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x)=0.$$

iv) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε

$$P(1)=0.$$

40. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{2}\eta\mu x\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

ii) $-\ln 2\leq f(x)\leq \ln 3-\ln 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

41. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\log x+1}{\log x-1}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(100)$ και $f(1000)$.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει $x_1=x_2$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(4x-20)=3.$$

42. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x\ln\sqrt{2^{x-1}}\ .$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 2$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.

43. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=7x^3-2\alpha x^2-3\alpha \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-3$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=9$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\left(\ln^2 x+2\right)^3}{2\left(\ln^2 x+2\right)^2+3}=\frac{9}{7}.$$

44. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(3-\sqrt{e^x+3}\right).$$

i) Να βρείτε το πεδό ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

45. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\log\left(5^x+x-1\right)+x\log 2.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A=(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 26+2\log 2$.

iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\text{εφ}x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\qquad \text{και}\qquad g(x)=(x-1)\ln x,\ x\in(0,+\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

ii) $\text{ημ}^2x<\text{συν}^2x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

iv) $\text{συν}^2x\cdot\ln(\text{ημ}x)<\text{ημ}^2x\ln(\text{συν}x)$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{3^x-2}{3^x-1}\quad \text{και}\quad g(x)=\ln\left(\frac{2\cdot 3^x-3}{3^{2x}-3^x}\right).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο

$$A_g=(-\infty,0)\cup\left(1-\frac{\ln 2}{\ln 3},\ +\infty\right).$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=e^{g(x)}$.

48. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(\log x)^{8\alpha}+4\log\frac{10}{x}\cdot(\log x)^{4\alpha},\quad x>0,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(100,0)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=\frac{1}{2}$

ii) η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x)=\left(\log^2 x-2\log x\right)^2,\quad \text{για κάθε}\quad x>0$$

iii) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ και δεύτερο κοινό σημείο.

49. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=2x^3+3\alpha x^2-x-2,$$

όπου α ακέραιος αριθμός και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln P(x).$$

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραια ρίζα ρ, τότε:

i) να υπολογίσετε τις τιμές των ακέραιων αριθμών α και ρ.

ii) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

iii) να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=\ln(x-2)+\ln\left(x^2+13\right).$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\ln\left(1+\eta\mu^2x\right)+\ln\left(1+\sigma\upsilon\nu^2x\right) \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

iii) $\left(1+\eta\mu^2x\right)\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu^2x\right)=\frac{9}{4}-\left(\eta\mu^2x-\frac{1}{2}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)\leq 2\ln\frac{3}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

v) ο αριθμός $2\ln\frac{3}{2}$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

numerica.

A. Liapis