



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εξισώσεις

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3

Εξισώσεις 2ου Βαθμού



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Ασκήσεις για Λύση

42. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 4x = 0$

ii) $2x^2 + x - 15 = 0$

iii) $5y^2 - 18y - 8 = 0$

iv) $\omega^2 - 6\omega + 7 = 0$.

43. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 = 0$

ii) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$.

44. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x+1)^2 + (x+2)^2 = 10x + 3$

ii) $(x-2)^2 + 2x^2 = 4x + 7$

iii) $(x-1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 - 4x$

iv) $(x-3)^2 + x^2 = (x-2)^2 - 3x + 4$.

45. i) Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα του $(3 - 2\sqrt{5})^2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 + 5x + 3\sqrt{5} = 1.$$

46. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 1 = 0$

ii) $x^2 - (3\alpha + 2)x + (2\alpha^2 + 3\alpha + 1) = 0$.

47. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 2(\alpha + \beta)x + (\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2) = 0$

ii) $x^2 - 4\alpha x + 3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$.

48. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

i) $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$

ii) $2x^2 + \lambda x - \lambda^2 = 0$

iii) $x^2 - 2x - \lambda(\lambda - 2) = 0$

iv) $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 = 1$.

49. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu = 0 \quad \mu\epsilon \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

έχει μία, τουλάχιστον, πραγματική ρίζα.

50. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 2\mu x + 3\mu - 2 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

51. Αν η εξίσωση

$$ax^2 + 2\beta x + \gamma = 0$$

έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση

$$\beta^2 x^2 - \alpha\gamma(x-1)^2 + \alpha\gamma = 1$$

έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

52. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

i) Να λύσετε την εξίσωση (1) όταν $\lambda = 0$.

ii) Αν $\lambda \neq 0$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

β) να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2

γ) να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$|x_1 - x_2| = 1.$$

53. Να λύσετε την εξίσωση

$$(2ax)^2 - 4a^2x + a^2 - 1 = 0,$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

54. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$3x^2 + 8(\kappa - 3)x + 5(\lambda - 2) = 0$$

έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

55. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει μία διπλή ρίζα.

56. Δίνεται η παράσταση

$$A = x(x^3 + 6x^2 + 11x + 6), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$A = x(x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$A = (x+2)(x+3).$$

57. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^4 + 1 = 5(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

58. Δίνονται οι εξισώσεις

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

και

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \tag{2}$$

με $\alpha\gamma \neq 0$.

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι:

i) $\rho \neq 0$

ii) ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (2).

59. Αν η εξίσωση

$$x^2 - (\kappa + \lambda)x + \kappa = 0$$

έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 3, να βρείτε τους αριθμούς κ και λ .

60. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να τις λύσετε:

i) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

ii) $16x^2 - 1 = 0$

iii) $2x^2 = 7x$

iv) $(\sqrt{2} - 1)x^2 - x = 0$.

61. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:

i) 1 και 4

ii) -2 και 5

iii) $3 - \sqrt{2}$ και $3 + \sqrt{2}$

iv) $1 + \sqrt{3}$ και $4 - \sqrt{3}$.

62. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 1 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $A = x_1^2 + x_2^2$

ii) $B = x_1^3 + x_2^3$

iii) $\Gamma = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

iv) $\Delta = x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.

63. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{1}{3x_1 + 1} + \frac{1}{3x_2 + 1}.$$

64. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 7 = 0$, να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

i) $x_1 + 2, x_2 + 2$

ii) $-2x_1, -2x_2$

iii) $\lambda x_1, \lambda x_2$

iv) $x_1x_2^2, x_1^2x_2$.

65. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + \lambda x - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$

β) x_1x_2

γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$.

66. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0, \quad \lambda \neq 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες x_1, x_2 για κάθε $\lambda \neq 2$.
- ii) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις
 $x_1 + x_2, \quad x_1 x_2$ και $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2$.
- iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση
 $3x_1 + 3x_2 = x_1^2 x_2^2 - 2\lambda - 3$.

67. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + x + \lambda - 1 = 0, \quad \lambda < \frac{5}{4}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.
- ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύει η σχέση
 $x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5 = 0$.

68. Έστω κ, λ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\kappa + \lambda = -2 \quad \text{και} \quad \kappa^3 + \lambda^3 = -26.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\kappa \cdot \lambda = -3$.
- ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς κ, λ και να τους βρείτε.

69. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 - (P+1)x - S + 3 = 0$$

όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της αντίστοιχα.

70. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ , ώστε

$$x_1^3 x_2^3 = -8.$$

71. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (3\kappa + 5\lambda)x + 2\lambda = 0$$

με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών κ και λ αν αυτοί είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

72. Έστω x_1, x_2 δύο θετικοί αριθμοί οι οποίοι είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha > 0 \quad \text{και} \quad \beta > 0.$$

ii) Να βρείτε συναρτήσει των α, β την τιμή της παράστασης

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}.$$

iii) Αν επιπλέον ισχύει $x_2 = 2x_1$, να αποδείξετε ότι

$$2\alpha^2 = 9\beta.$$

73. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $6x^2 + |x| - 1 = 0$

ii) $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0.$

74. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = |x - 3| \quad \text{και} \quad B = |2x - 3| - 1.$$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $A = 2x^2$

ii) $B = x^2 - 1$

iii) $A^2 - A - 2 = 0$

iv) $B^2 - 2B = 8.$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)^2 - 5\left(\frac{3x+2}{x-3}\right) + 3 = 0$

ii) $4\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 - \frac{|6x-12|}{|x-3|} - 4 = 0.$

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x^2 + x - 1)^2 + 3|x^2 + x - 1| = 4$

ii) $(x^2 - 3x - 1)^2 + 4(x^2 - 3x) = 1.$

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{7}{x^2 - 1} + \frac{8}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x}{2x^2 + 2x}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{1}{2x - x^2} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = 0.$$

78. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^{10} + x^5 + \alpha = 0 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R},$$

τότε:

i) να βρείτε την τιμή του α

ii) να λύσετε την εξίσωση.

79. Να λύσετε στο διάστημα $(2, +\infty)$ την εξίσωση

$$\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} - 2 \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{1 - x^2} = 2.$$

80. Δίνεται η εξίσωση

$$|x - 1| + 6|\alpha| = 9 + \alpha^2, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α .

ii) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

81. Δίνεται η εξίσωση

$$3x^4 + (\kappa^4 - 2\kappa^2 + 1)x^3 - (3\kappa + 2)x^2 - 2 = 0, \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση είναι διτετράγωνη.

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του κ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε τη δοθείσα εξίσωση.

82. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x - 3)^4 - 8(x^2 - 6x + 9) + 16 = 0.$$

83. Να λύσετε την εξίσωση

$$(2x-1)^2 - \left| \frac{1}{2} - x \right| - \frac{1}{2} = 0.$$

84. Δίνεται η εξίσωση

$$\mu x^2 - 9x + 4\mu = 0, \quad \mu \neq 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι αν $|\mu| < \frac{9}{4}$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- ii) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, όταν $\mu = \sqrt{2}$.
- iii) Να βρείτε την τιμή του μ , αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι το -1 .
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)^2 - 9 \left(x + \frac{2}{x} \right) + 4\sqrt{2} = 0$.

85. Το εξώφυλλο ενός βιβλίου είναι ορθογώνιο και έχει διαστάσεις

$$x-1 \text{ και } x+6 \text{ cm.}$$

- i) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του εξωφύλλου του βιβλίου ως συνάρτηση του x .
- ii) Αν το εμβαδόν του εξώφυλλου είναι 408 cm^2 , να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

86. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0, \quad \lambda > 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες θετικές.
- ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Αν οι ρίζες x_1, x_2 αποτελούν τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου, να υπολογίσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E αυτού του ορθογωνίου, συναρτήσει του λ .
- iii) Να αποδείξετε ότι $\Pi - E > -\lambda$.

87. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + ax - 2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η δοθείσα εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .
- ii) Αν επιπλέον ισχύει $x_1 - x_2 = 3a < 0$ να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του a .

88. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\frac{a}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\beta^2 \geq 4a\gamma$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει $3a + 2\beta = 0$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης.

89. i) Να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$a^2 + \beta^2 = (a + \beta)^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$(x^2 - 3x + 2)^2 + (x^2 - 6x + 8)^2 = (2x^2 - 9x + 10)^2.$$

90. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ τέτοιοι, ώστε

$$\alpha + \beta = \frac{81}{\alpha} + \frac{81}{\beta} = 19.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2}.$$

91. Αν η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης

$$x(32 - x) = 31$$

επαληθεύει την εξίσωση

$$\lambda^2 (x + 4\mu^2) + 2\lambda(x + 2\lambda\mu) + x + \lambda^2 = 0,$$

να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

92. Αν για τους συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ της εξίσωσης

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha\beta \neq 0 \quad \text{και} \quad |\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|,$$

να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

93. Δίνεται η εξίσωση

$$39x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $x_1 = -2$.

- i) Να βρείτε την τιμή του λ .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση.

94. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + ax - 3 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τριπλάσιο του τετραγώνου της άλλης, να βρείτε:
 - α) τις ρίζες της εξίσωσης
 - β) την τιμή του a .

95. Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 + ax + \beta - 1 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 + \beta x + a - 1 = 0 \quad \text{με} \quad a \neq \beta.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορεί να είναι συγχρόνως αδύνατες
- ii) αν οι παραπάνω εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα, τότε $a + \beta = 0$.

96. Δίνεται η εξίσωση

$$2011x^2 - 2011x + 502 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2
- ii) $x_1 + x_2 = 1$
- iii) $0 < x_1 < 1$ και $0 < x_2 < 1$
- iv) $\sqrt{x_1^2 + 4x_2} + \sqrt{x_2^2 + 4x_1} = 3$.

97. Δίνεται η εξίσωση

$$25x^2 - 35x + 12 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η δοθείσα εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 \neq x_2$.
- ii) $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- ii) για κάθε $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 3$ ισχύει $x_1^v + x_2^v < 1$.



numerica.

A . L i a p i s