



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανισώσεις

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.2

Ανισώσεις 2ου Βαθμού



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Ασκήσεις για Λύση

37. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 7x + 6$

ii) $4x^2 - 9x + 2.$

38. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

i) $x^2 + 9x + 14$

ii) $2x^2 - 5x - 3$

iii) $6x^2 - x - 1$

iv) $-x^2 + 7x - 10.$

39. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

i) $x^2 + 2ax - 3a^2$

ii) $\alpha x^2 - (\alpha\beta + 1)x + \beta.$

40. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 10}$

ii) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x + 4}.$

41. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{(x+1)(x^2 - 2x + 3)}{x^2 - x - 2}$

ii) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}.$

42. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5}$

ii) $\frac{-x^2 - 7x - 12}{x^2 + 3x}$

iii) $\frac{2x^2 + 5|x| - 3}{x^2 - 2|x| - 15}$

iv) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}.$

43. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 - \alpha x - 6\alpha^2}{x^2 - 7\alpha x + 12\alpha^2}$

ii) $\frac{x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha}{x^2 - \alpha x}.$

44. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 3x - 10$

ii) $-3x^2 + 7x - 2.$

45. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 5x - 7$

ii) $4x^2 - 12x + 9$

iii) $x^2 - 4x + 5$.

46. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $(\kappa^2 + 1)x^2 + 2\kappa x + 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$

ii) $\alpha x^2 - (\alpha^2 + 1)x + \alpha$, με $\alpha > 1$.

47. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 \leq 4x$

ii) $x^2 + x \leq 6$

iii) $x^2 - 8x + 7 > 0$

iv) $3x^2 - 7x + 2 < 0$.

48. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^2 + x + 5 \leq 0$

ii) $5x^2 + 4x + 1 > 0$

iii) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

iv) $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

49. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 \geq 5x$

ii) $x^2 < 9$

iii) $x(2x + 1) \leq 21$

iv) $2x(x + 3) > 3(x^2 + 3)$.

50. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x - 2)^2 + 3(x + 2)^2 \geq (x + 4)^2$

ii) $(3 - x)^2 - 2(2x + 1)^2 \leq 6 + (3x + 1)^2$

iii) $(1 - \sqrt{3})x^2 + 3x - 1 - \sqrt{3} < 0$

iv) $(x + 1)^3 - (2x + 1)^2 > x(x + 2)$.

51. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

i) $5x < x^2 + 4 < 13$

ii) $-3 < x^2 - 4x < 5$.

52. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

i) $1 < x^2 \leq 2x$

ii) $2 \leq x^2 - x < 6$.

53. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 2x < 8.$$

54. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x(x+3) \leq 40 \quad \text{και} \quad x^2 + 2 > 2\sqrt{2}x.$$

55. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$|2x - 5| \geq 3 \quad \text{και} \quad x^2 + 12 \leq 8x.$$

56. Να λύσετε την ανίσωση

$$|x^2 - x - 3| < 3.$$

57. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$|2x - 1| \leq 3 \quad \text{και} \quad |x^2 - 2x + 2| < 5.$$

58. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν πραγματικές ρίζες:

i) $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 3 = 0$

ii) $x^2 - \sqrt{5}\lambda + \lambda^2 - \lambda = 0.$

59. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

i) $-x^2 + \mu x + 5 - 3\mu < 0$

ii) $x^2 - 2\mu x + \mu + 2 \geq 0.$

60. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις είναι αδύνατες:

i) $x^2 + 3\lambda x + (2\lambda^2 + \lambda) \leq 0$

ii) $-x^2 + 2(\lambda + 1)x - 4\lambda > 0.$

61. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

i) $x^2 + 2\lambda x + (\lambda + 12) \geq 0$

ii) $-x^2 + (\lambda + 2)x - (1 + 3\lambda) < 0.$

62. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

i) $(\lambda - 1)x > \mu^2 - 5\mu + 6$

ii) $(\lambda + 2)x < \mu^2 - 8\mu + 7.$

63. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$(\kappa - 2)x^2 + (8 - 2\kappa)x - (8 - 3\kappa) = 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

64. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\alpha x^2 + (\alpha + 2)x - \frac{1}{4} = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες.

65. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + \frac{4\lambda - 3}{4} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , πραγματικές και άνισες.

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$\lambda(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 8.$$

66. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (\mu - 1)x - (\mu^2 + 1) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$x_1 - 2x_1x_2 > 4 - x_2.$$

67. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha - 3)x - \alpha + 2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν $\alpha \neq 1$.

- iii) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες για τις οποίες ισχύει

$$2ax_1 - 3x_1x_2 + 2ax_2 \leq -1,$$

να βρείτε τις τιμές του a .

68. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$(x^4 - 3x^2 + 1)(x^4 - 3x^2 + 3) + 1.$$

69. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$x^2 + y^2 + 2x + 12y + 33 = 0,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 4$

ii) $x > y$.

70. Δίνονται οι ανισώσεις

$$x^2 - 3x < 0 \quad \text{και} \quad |2x - 1| \leq 3.$$

- i) Να βρείτε τις λύσεις τους.
ii) Να βρείτε τις κοινές λύσεις τους.
iii) Αν οι αριθμοί x_1 και x_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ανήκει στο ίδιο σύνολο.

71. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x = \lambda + 3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.
ii) Να αποδείξετε ότι $x_1 < -1 < x_2$.
iii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες x_1 και x_2 είναι αρνητικοί αριθμοί.
iv) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$x_1x_2^2 + x_1^2x_2 > 2.$$

72. i) Να λύσετε την εξίσωση

$$|x^2 - 7x - 8| = 8 + 7x - x^2.$$

- ii) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς

$$\sqrt{2} + 7, \quad \sqrt{3} - 3 \quad \text{και} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + 4$$

είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

73. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$x^2 + \mu x + \frac{4\mu + 5}{4} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

74. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x|x+1| > 2$

ii) $(x+1)|x| > -2.$

75. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει

$$x^2 + y^2 - 2x - y + \alpha > 0 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

76. Δίνεται το τριώνυμο

$$-x^2 + \kappa x + 2\lambda \quad \text{με} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει δύο ρίζες $x_1 \neq x_2$ τέτοιες, ώστε

$$|x_1| < 2 \quad \text{και} \quad |x_2| < 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\lambda| < 2$

ii) $|\kappa| < 4$

iii) $-4 + 2\kappa + 2\lambda < 0$

iv) $(\lambda + \kappa - 2)(\lambda - \kappa - 2) > 0.$

77. Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι, ώστε

$$\alpha + \beta + \gamma < 0, \quad 4\alpha + 2\beta + \gamma > 0 \quad \text{και} \quad 9\alpha + 3\beta + \gamma < 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta^2 > 4\alpha\gamma$

ii) $\alpha < 0$

iii) $\beta > 0$ και $\gamma < 0$

iv) $5 < \frac{\gamma - \beta}{\alpha} < 11.$



numerica.

A . L i a p i s