



Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 6.2

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης



Ασκήσεις

numerica.

A . L i a p i s

Ασκήσεις για Λύση

22. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(5, -3)$ ως προς:

- i) τον άξονα $x'x$
- ii) τον άξονα $y'y$
- iii) την αρχή των αξόνων
- iv) τη διχοτόμο της γωνίας xOy .

23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε:

- i) την τιμή του α
- ii) το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τετμημένη $x_0 = 3$.

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x - \alpha} + \frac{9 + \alpha}{x - 2\alpha},$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -4)$, να βρείτε:

- i) την τιμή του α
- ii) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

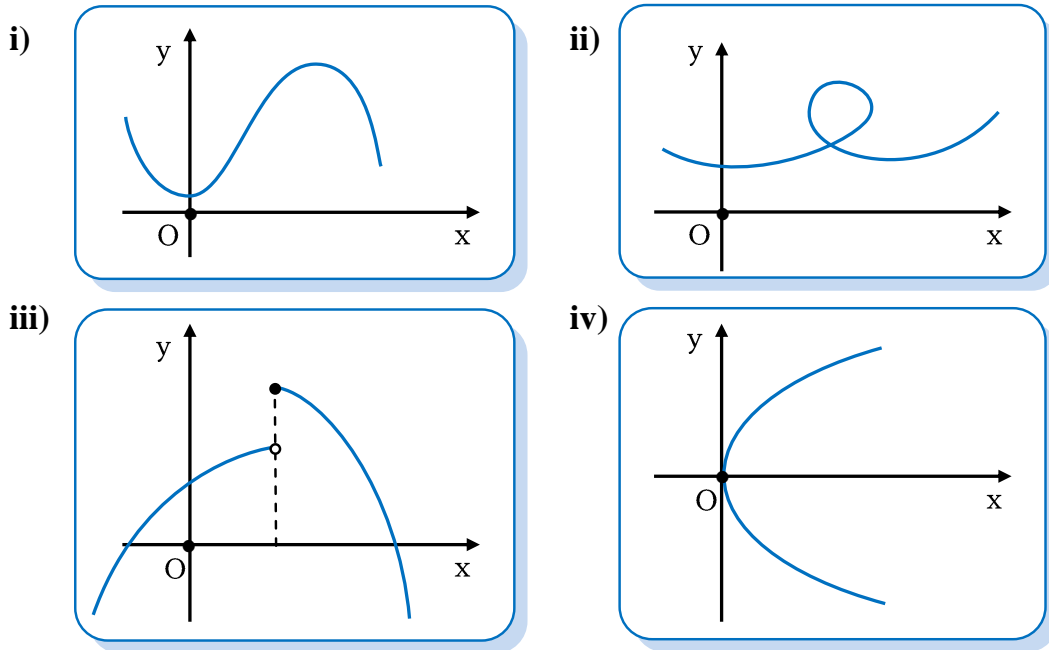
25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$
- ii) να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τετμημένη 3
- iii) να αποδείξετε ότι τα σημεία της C_f που έχουν τεταγμένη $\beta > 1$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

26. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



27. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{4}{x-4}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες 2 και 6 αντίστοιχα.
- iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

28. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Να βρείτε:

- i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

29. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + a},$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} , τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $a \geq 0$
- ii) να βρείτε την τιμή του a έτσι, ώστε η C_f να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = |x - 1| + a \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0, -6)$, να βρείτε:

- i) την τιμή του a
- ii) τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

31. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 7x + 10, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- ii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

32. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2x^2 + 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$
- ii) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$
- iii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

33. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 + x + \alpha, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 22)$, να βρείτε:

- i) την τιμή του αριθμού α
- ii) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- iii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

34. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - \alpha x + \alpha, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(2, 3)$, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του α
- ii) να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

35. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \kappa x^2 - 2x + \kappa, \quad x \in \mathbb{R}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$, διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$, να αποδείξετε ότι:

- i) $\kappa = 3$
- ii) η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

36. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα μέρος της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(0)f(2)f(4) < 0$
- ii) η εξίσωση

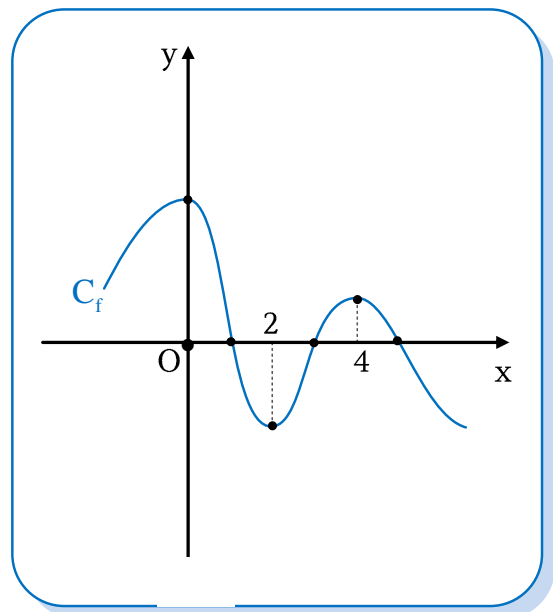
$$f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον τρεις πραγματικές ρίζες

- iii) η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 4)$.



37. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 5x \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 7.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη C_g .

38. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = x^2 + 3x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g .

39. Δίνονται οι συνάρτησεις

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{5x - 4}{x^2 + 1}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των C_f και C_g
- ii) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τη C_g .

40. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |x - 1| - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

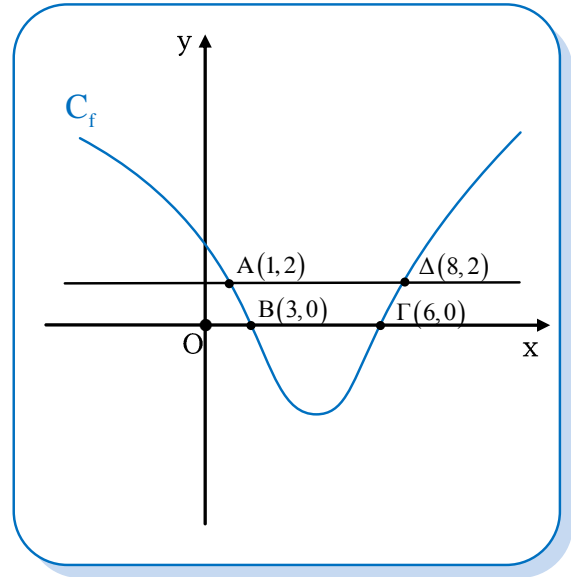
- i) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < f(2).$$
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = f(4).$$

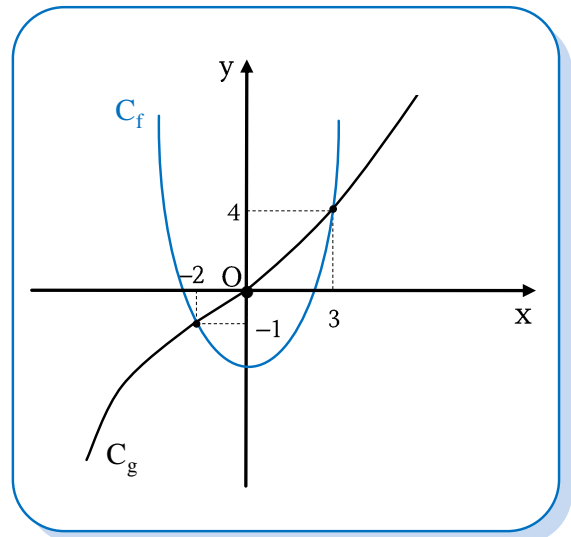
41. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

- i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- iii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $0 < f(x) < 2$.



42. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} .

- i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.



43. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 + (\alpha + 1)x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = (\alpha - 1)x - (\alpha + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον άξονα x' .
- ii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινά σημεία.
- iii) Για $\alpha = -3$ να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη C_g .

44. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

- $f(x) = g^2(x) - 2g(x) + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο

$$A(2,1).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq f(2) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν $g(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x^2 - 4x + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



numerica.

A . L i a p i s