Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 — Διανύσματα

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3 — Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

12. Αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{\Sigma A}+\overrightarrow{\Sigma B},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Ρ και Σ ταυτίζονται.

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{M\Delta}.$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Β.

14. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{A\Delta}+2\overrightarrow{B\Delta}+3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+2\overrightarrow{B\Gamma}.$$

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{x}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{x}+\frac{1}{5}\vec{\beta}=\frac{4}{5}\left(\vec{x}+\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right).$$

i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

ii) Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύουν

$$\overrightarrow{AB}=\vec{x} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma}=-12\vec{\alpha}+15\vec{\beta}$$

να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

16. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

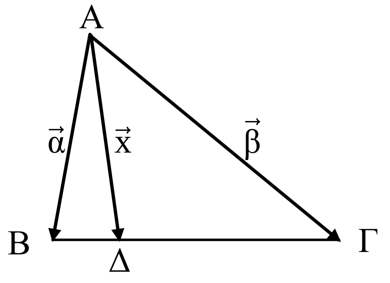
17. Στο διπλανό σχήμα έχουμε

$$(B\Delta)=\frac{2}{5}(\Delta\Gamma).$$

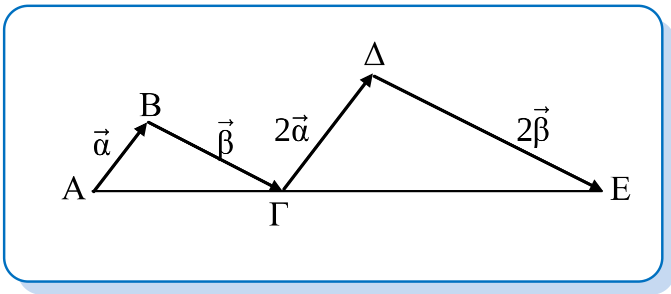
Να αποδείξετε ότι:

i) $5\overrightarrow{B\Delta}=2\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

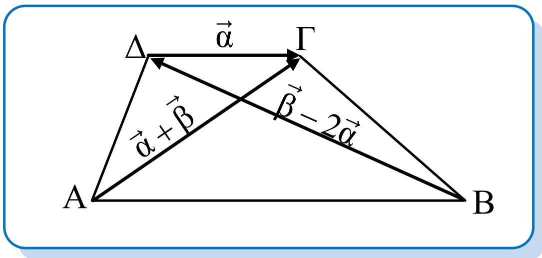
ii) $\vec{x}=\frac{1}{7}\left(5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)$.



18. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ε του διπλανού σχήματος είναι συνευθειακά.



19. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στο διπλανό σχήμα είναι τραπέζιο.



20. Δίνονται τα διανύσματα

$$\overrightarrow{ΟΑ}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta},\quad \overrightarrow{ΟΒ}=7\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{ΟΓ}=22\vec{\alpha}-9\vec{\beta}.$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

21. Δίνονται τα διανύσματα

$$\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma},\quad \overrightarrow{ΟΒ}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}\quad \text{και}\quad \overrightarrow{ΟΓ}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}+3\vec{\gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι το μέσον του τμήματος ΑΓ.

22. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{ΑΒ}+2\overrightarrow{ΒΓ}-3\overrightarrow{ΓΑ}=\vec{0},$$

να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{ΟΓ}=4\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}$$

ii) τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

23. Αν ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{ΑΚ}+4\overrightarrow{ΒΚ}+7\overrightarrow{ΑΒ}=3\overrightarrow{ΛΒ}+8\overrightarrow{ΑΜ},$$

να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{OK} = 8\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{O\Lambda}$$

ii) τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma}$$

ii) το Μ είναι το μέσον του ΑΓ.

25. Αν ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Lambda B} + 4\overrightarrow{AM},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

26. Δίνεται παραλληλόγραμμοΑΒΓΔ, ένα σημείο Μ και πραγματικός αριθμός λ έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{MB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}.$$

i) Να βρείτε την τιμή του λ.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Δ.

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}.$$

Αν ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AE} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

τότε:

i) να αποδείξετε για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι συνευθειακά

ii) να βρείτε την τιμή του κ για την οποία το σημείο Γ είναι το μέσον του ΔΕ.

28. Δίνονται σημεία Α, Β, Κ, Λ και Μ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AK}+(\lambda-1)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{B\Lambda}+\lambda\overrightarrow{AM}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{A\Delta}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta}=\mu\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$.

30. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι πραγματικοί αριθμοί λ και μ τέτοιοι, ώστε:

$$\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ και $\mu=2$.

31. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB} \quad \text{για κάποιον} \quad \lambda\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda\neq-1$

ii) για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

32. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ το μέσον της διαγωνίου του ΑΓ. Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-3\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0} \quad \text{και} \quad 2\overrightarrow{EA}-2\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{E\Gamma}=\vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $2\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{\Gamma E}$

ii) το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

36. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$x\overrightarrow{A\Gamma} + (1-y)\overrightarrow{B\Delta} = (x+1)\overrightarrow{A\Delta} + y\overrightarrow{AB}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(x-1)\cdot\overrightarrow{AB} = y\cdot\overrightarrow{A\Delta}$ **ii)** $x=1$ και $y=0$.

37. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και σημεία Ο, Α, Β, Γ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \quad \overrightarrow{OB} = (x+1)\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{O\Gamma} = 5\vec{\alpha} + (2y-1)\vec{\beta}$$

όπου x, y σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $(x-2)\vec{\alpha} = (y-3)\vec{\beta}$ **ii)** $x=2$ και $y=3$.

38. Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και τα σημεία Γ, Δ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\Delta B} = 3\overrightarrow{AB}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda = -4$ **ii)** $\overrightarrow{A\Delta} = -2\overrightarrow{AB}$.

39. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$4 \le |\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}| \le 6.$$

40. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{\text{ΒΑ}} \ , \quad \vec{\beta} = \overrightarrow{\text{ΑΓ}} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{ΓΜ}} \ ,$$

όπου Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -2\vec{\gamma}$

ii) Αν $|\vec{\alpha}| = 1$ και $|\vec{\beta}| = 3$, τότε $1 \le |\vec{\gamma}| \le 2$.

41. Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| > |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

ii) αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

42. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \overrightarrow{\text{ΖΓ}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσον Δ της ΒΓ και το σημείο Ε για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{\text{ΑΕ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$, $\overrightarrow{\text{ΕΔ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΕΒ}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$5\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΓΒ}} = 3\left(\overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΕΔ}} + \overrightarrow{\text{ΕΒ}}\right).$$

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\overrightarrow{B\Gamma}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma A} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$2\overrightarrow{A\Delta} + 3\overrightarrow{BE} + 4\overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{0}.$$

45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσον Δ της ΒΓ και τα σημεία Ε, Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A\Delta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ και $\overrightarrow{BZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

46. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Delta B} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{B\Gamma}.$$

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ ως γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{A\Delta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

47. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \neq \vec{0}$

ii) τα διανύσματα

$$\vec{u} = 5\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

δεν είναι συγγραμμικά.

48. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΒΕ}} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}} = \vec{0}.$$

49. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν Ζ είναι το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Ο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{\text{ΟΑ}} + 2\overrightarrow{\text{ΟΒ}} + \overrightarrow{\text{ΟΓ}} = 4\overrightarrow{\text{ΟΖ}}.$$

50. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ καθώς επίσης και τα μέσα Ε, Ζ των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΓΒ}} + \overrightarrow{\text{ΓΔ}} = 4\overrightarrow{\text{ΕΖ}}$

ii) αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} - \overrightarrow{\text{ΒΓ}} = 4\overrightarrow{\text{ΕΖ}}$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

51. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο το σημείο Κ.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} + 2\overrightarrow{\text{ΜΔ}} = 4\overrightarrow{\text{ΜΛ}}$$

όπου Λ το μέσο του ΔΚ.

ii) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

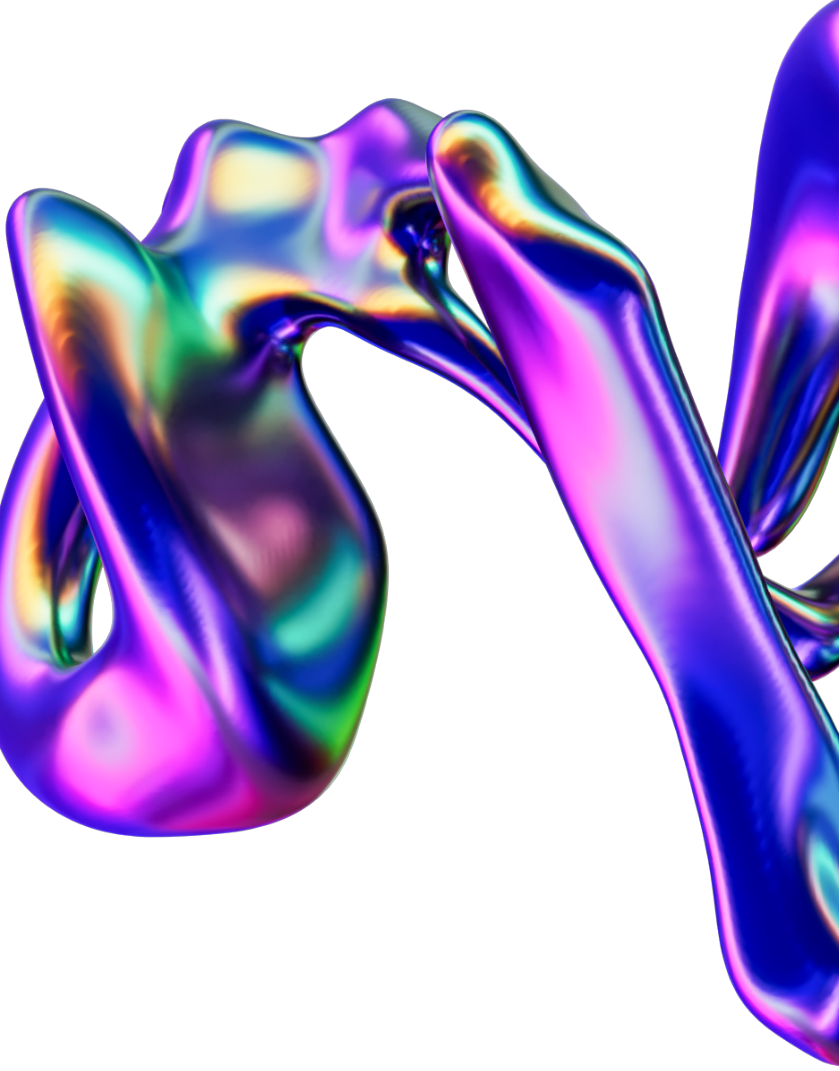
$$\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} + 2\overrightarrow{\text{ΜΔ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} - 2\overrightarrow{\text{ΜΔ}}\right|$$

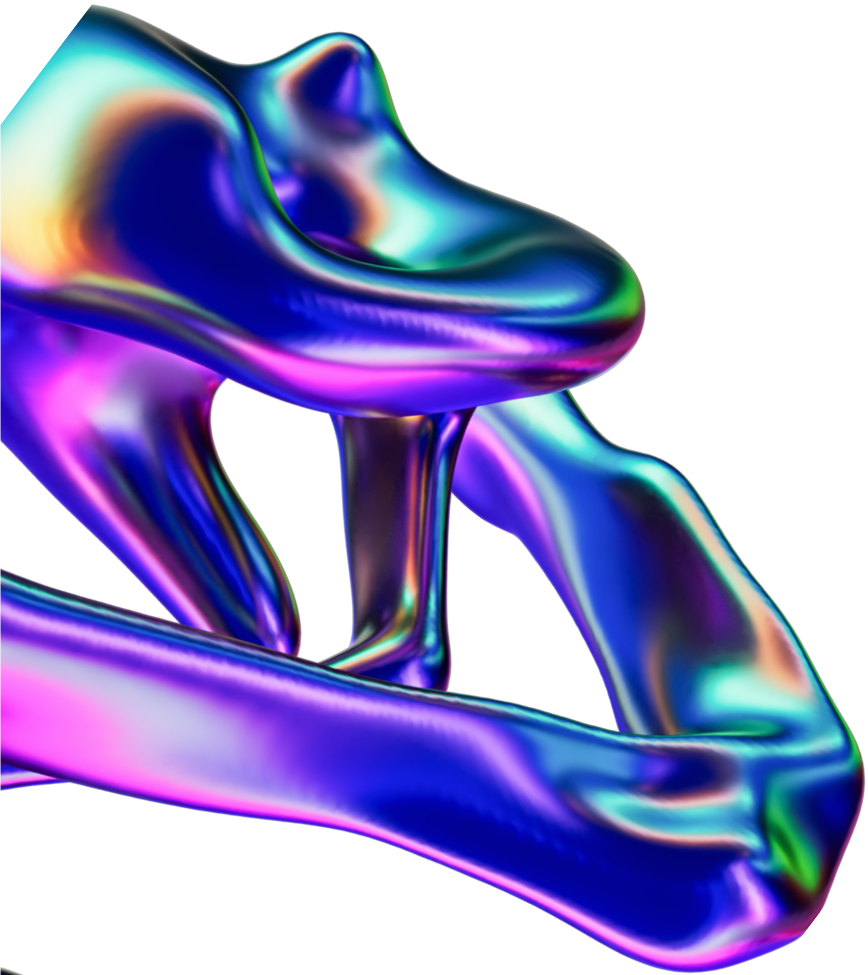
είναι ο κύκλος με διάμετρο ΔΚ.

iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

α) $\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} + 2\overrightarrow{\text{ΜΔ}} \;//\; \overrightarrow{\text{ΑΒ}}$

β) $\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} + 2\overrightarrow{\text{ΜΔ}}\right| = 4\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}}\right|$.





numerica.

A. Liapis