



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διανύσματα

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.4

Συντεταγμένες στο Επίπεδο



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

52. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$:

$$A(2, 5), \quad B(-4, 3), \quad \Gamma(1, -2) \quad \text{και} \quad \Delta(\alpha, \beta - 2).$$

53. Έστω Oxy καρτεσιανό επίπεδο με μοναδιαία διανύσματα \vec{i} και \vec{j} .

Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x - 1)\vec{i} + 4\vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (3 - x)\vec{i} + y\vec{j}$$

να είναι ίσα μεταξύ τους.

54. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{\alpha} = (\mu^2 - \mu, \mu^2 - 4\mu + 3), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες είναι:

$$\text{i) } \vec{\alpha} = \vec{0} \quad \text{ii) } \vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} // x'x.$$

55. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\lambda - \mu, 1 + 2\mu) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\mu - 3, 2\lambda - 3).$$

Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

56. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (-2, 4).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

$$\text{i) } \vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{ii) } \vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

57. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (0, 2), \quad \vec{\beta} = (4, -1) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (-4, 5).$$

Να βρείτε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει η σχέση $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

58. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε για τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x, 1), \quad \vec{\beta} = (2, -2) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = (0, y)$$

να ισχύει η σχέση $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

59. Έστω $M(2,3)$ το μέσο του τμήματος AB με $A(3,2)$.

Να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες του σημείου B
- ii) τις συντεταγμένες του σημείου K για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

60. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις τις AB και $\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $(AB) = 2(\Gamma\Delta)$. Αν είναι $A(1,0)$, $B(7,2)$ και $\Gamma(4,5)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

61. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,4), \quad B(3,2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-1,5).$$

Αν M είναι το μέσο του AB , να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες του σημείου M
- ii) το σημείο Δ , ώστε το M να είναι το μέσον του $\Gamma\Delta$.

62. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(4,5)$ να είναι το μέσο του τμήματος AB , όπου $A(x,7)$ και $B(8,y)$.

63. Το σημείο $M(3,2)$ είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος AB με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν $\overrightarrow{AB} // x'x$ και x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - (\lambda + 1)x + 5 = 0$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός, να βρείτε:

- i) την τιμή του λ
- ii) τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

64. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με

$$A(1, 1), \quad B(4, 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(5, 3).$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- i) της κορυφής Δ
- ii) του κέντρου K του $AB\Gamma\Delta$.

65. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο το σημείο $K(2,4)$. Αν είναι $A(-2,1)$ και $B(4,3)$, να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .
- ii) τις συντεταγμένες του σημείου E έτσι, ώστε το τετράπλευρο $K\Gamma E\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

66. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία $K(3,4)$, $\Lambda(4,5)$ και $M(0,3)$ που είναι τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B και Γ .

67. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με

$$B(2, -1) \quad \text{και} \quad \Gamma(3, 2).$$

Αν το σημείο A ανήκει στον άξονα $x'x$ και το κέντρο K του $AB\Gamma\Delta$ ανήκει στον άξονα $y'y$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , K και Δ .

68. Δίνονται τα διαστήματα

$$\vec{u} = (2, 5) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (-1, 0).$$

Αν O είναι η αρχή των αξόνων και A, B δύο σημεία τέτοια, ώστε

$$\vec{OA} = \vec{u} + 4\vec{v} \quad \text{και} \quad \vec{OB} = 2\vec{u} - 3\vec{v},$$

να βρείτε τις συντεταγμένες:

- i) των σημείων A και B
- ii) του μέσου M του τμήματος AB .

69. Αν $A(-2, 0)$ και $\vec{AB} = (0, 4)$, να βρείτε τις συντεταγμένες:

- i) του σημείου B
- ii) του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{OA} + 3\vec{BA}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

70. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,4) \quad \text{και} \quad B(2,7).$$

Να βρείτε το σημείο M για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}.$$

71. Δίνονται τα σημεία

$$A(-2,0) \quad \text{και} \quad B(7,8).$$

Να βρείτε το σημείο M για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM}.$$

72. Δίνεται το σημείο $M(5,2)$. Να βρείτε τα σημεία A, B τα οποία ανήκουν στους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα και είναι τέτοια, ώστε το σημείο M να είναι το μέσον του AB .

73. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{a} = (\lambda - 1, \lambda^2 - 5\lambda + 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{a} \neq \vec{0} \quad \text{και} \quad \vec{a} // x'x.$$

74. Αν είναι

$$\vec{a} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, \lambda - 1),$$

να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

i) $\vec{a} // x'x$

ii) $\vec{a} // y'y$ και $|\vec{a}| = 1$.

75. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1,1)$ και $\vec{\beta} = (2,1)$.

Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων

$$\vec{u} = 4\vec{a} + 2\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 3\vec{a} - \vec{\beta}.$$

76. Δίνονται τα σημεία $A(3,5)$ και $B(0,1)$. Να βρείτε το σημείο Γ του άξονα $x'x$, έτσι ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$.

77. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (2, -1).$$

Να βρείτε το διάνυσμα \vec{v} το οποίο είναι ομόρροπο του \vec{u} και έχει μέτρο ίσο με $3\sqrt{5}$.

78. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (-2, 6).$$

Να βρείτε το διάνυσμα \vec{v} το οποίο είναι αντίρροπο του \vec{u} και έχει μέτρο ίσο με $\sqrt{10}$.

79. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (3, -4).$$

Να βρείτε τα διανύσματα που είναι συγγραμμικά με το διάνυσμα \vec{u} και έχουν μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του διανύσματος \vec{u} .

80. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (4, 1) \text{ και } \vec{\beta} = (0, 2).$$

Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5.$$

81. Δίνονται τα σημεία

$$A(7, 5), \quad B(0, -2) \text{ και } \Gamma(8, 4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

82. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 4), \quad B(3, 0) \text{ και } \Gamma(5, 2).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ , ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος.

83. Δίνεται ένα διάνυσμα \vec{a} για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\vec{a} = (1, 3) + |\vec{a}| \cdot (-1, 0).$$

Να βρείτε:

- i) το μέτρο του διανύσματος \vec{a}
- ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{a} .

84. Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{a} = (0, \sqrt{3}) + |\vec{\beta}| \cdot (1, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (2, 1) + |\vec{a}| \cdot (-1, 0).$$

Να βρείτε:

- i) τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$
- ii) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

85. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{a} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (-2, 4).$$

- i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
- ii) Να εκφράσετε το διάνυσμα

$$\vec{u} = (6, 8)$$

ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

86. Αν \vec{i}, \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα του Οxy, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ έτσι, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = \vec{i} - \lambda \vec{j} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\lambda + 2) \vec{i} + (\kappa^2 + 1) \vec{j}$$

να είναι συγγραμμικά.

87. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x^2, 2) + (y^2 + 1, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x, 1) + 2(y - 1, 0)$$

τα οποία είναι παράλληλα μεταξύ τους. Να βρείτε:

- i) τις τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$
- ii) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

88. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x^2 + 1, -y) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (y - 2, 1)$$

είναι μεταξύ τους παράλληλα.

89. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (\mu - 2, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\mu^2 - 4, 5)$$

είναι μεταξύ τους παράλληλα.

90. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \geq \sqrt{10}.$$

91. Δίνονται τα σημεία

$$A(x, 1), \quad B(-1, x) \quad \text{και} \quad \Gamma(x+1, 1-x) \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ώστε το άθροισμα

$$f(x) = (OA)^2 + (OB)^2 + (OG)^2$$

να γίνεται ελάχιστο. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $f(x)$;

92. Δίνονται τα σημεία

$$A(0, 5), \quad B(1, 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(3, 4).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$, ώστε το άθροισμα

$$f(x) = (MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2$$

να γίνεται ελάχιστο.

93. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 2), \quad B(5, 1) \quad \text{και} \quad M(x, 0) \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να υπολογίσετε το $(A'B)$, όπου A' το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$.

ii) Να υπολογίσετε το (AM) και το (BM) .

iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

94. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία τα σημεία

$$A(0, 1), \quad B(1, \mu + 1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2 - \mu, 2)$$

είναι συνευθειακά.

95. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία τα σημεία

$$A(1, \mu), \quad B(-1, \mu + 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-\mu, -3)$$

είναι συνεθιακά.

96. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (-2, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1, 1).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{u} για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$(\vec{u} - \vec{\alpha}) // \vec{\beta} \quad \text{και} \quad (\vec{u} - 2\vec{\beta}) // (\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}).$$

iii) Να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{u} ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

97. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το σημείο N για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{AN} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{BN} = 3\mu \vec{BA} + \lambda \vec{A\Gamma} \quad \text{με} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$(1 - \lambda - 3\mu) \vec{AB} = (\mu - \lambda) \vec{A\Gamma}.$$

ii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς λ και μ .

iii) Αν είναι

$$A(2, 2), \quad B(0, 1) \quad \text{και} \quad N(2, 1),$$

να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

98. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 2) \quad \text{και} \quad B(3, \kappa).$$

Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα \vec{AB} να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 5$.

99. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (1, \sqrt{3}).$$

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου A για το οποίο ισχύει

$$\vec{OA} = \vec{u}$$

όπου O η αρχή των αξόνων

ii) τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{u} με τον άξονα $x'x$.

100. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{u} = (2\mu - 4, \mu^2 - 3\mu)$$

όπου μ σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το διάνυσμα \vec{u} έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.
- ii) Για τις τιμές του μ που βρήκατε στο ερώτημα i) να παραστήσετε το διάνυσμα \vec{u} στο καρτεσιανό επίπεδο.
- iii) Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία το διάνυσμα \vec{u} σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

101. Δίνεται το διάνυσμα

$$\vec{a} = (-3, \sqrt{3}).$$

Να βρείτε:

- i) τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{a} με τον άξονα $x'x$
- ii) το διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο είναι αντίρροπο του \vec{a} και έχει μέτρο διπλάσιο από το μέτρο του διανύσματος \vec{a} .
- iii) τη γωνία φ' που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

102. Δίνονται τα συγγραμμικά διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x + 2, 5 - x) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x - 7, 2x - 10),$$

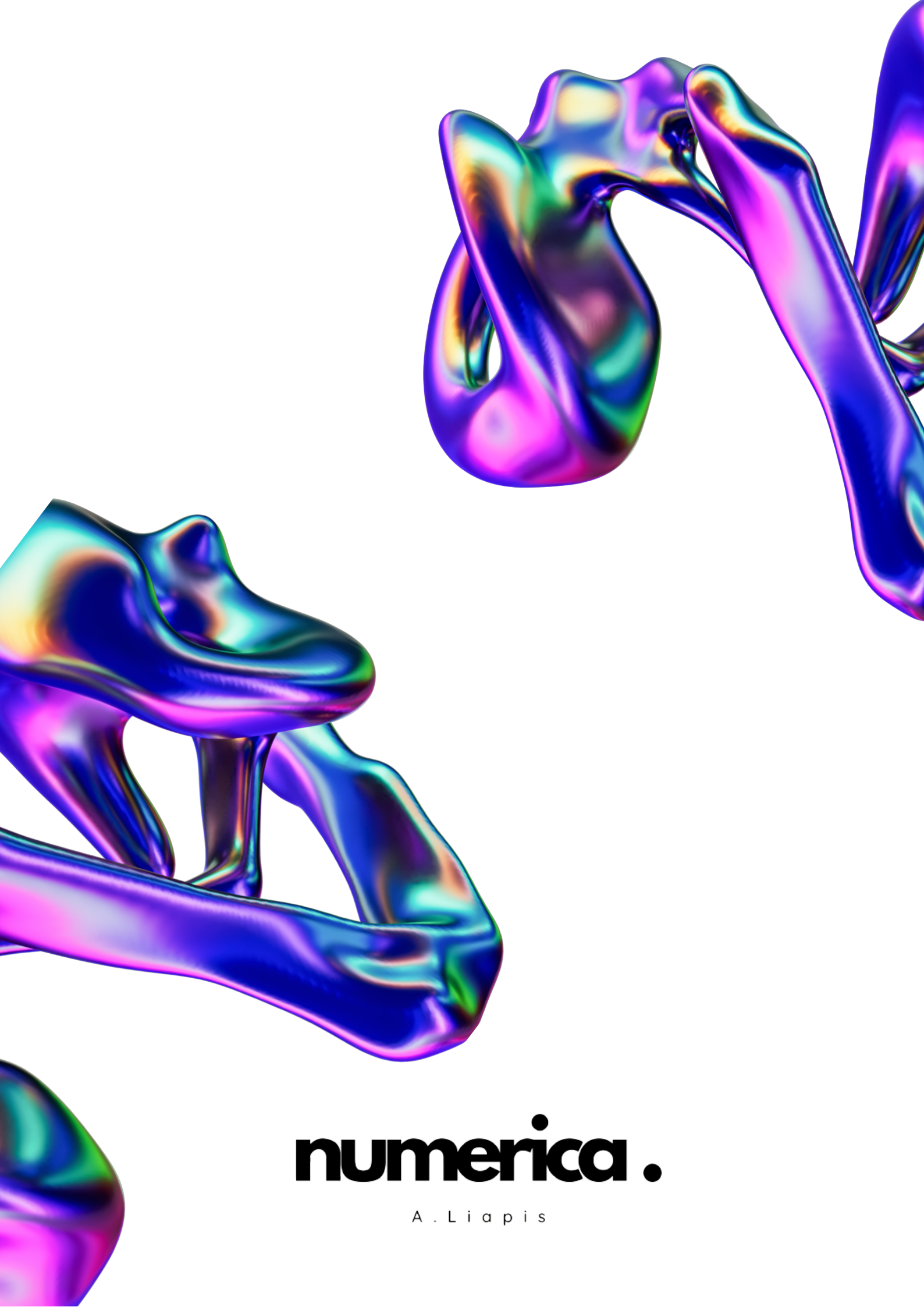
όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $x = 1$
- ii) να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

με τον άξονα $x'x$, όπου $\vec{\gamma} = (3, 5)$.



numerica.

A . L i a p i s