



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διανύσματα

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5

Εσωτερικό Γινόμενο
Διανυσμάτων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica .

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

103. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) $(2\vec{\alpha}) \cdot (3\vec{\beta})$

iii) $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$

iv) $\vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} - 6\vec{\beta})$.

104. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 8, |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) $\vec{\alpha} \cdot (-2\vec{\beta})$

iii) $\vec{\alpha}^2$

iv) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

105. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2 \quad \text{και} \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$.

106. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = 3 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}),$$

να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

iii) $(2\vec{\alpha}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

107. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

108. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$

109. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 4 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Να βρείτε:

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) τον $\kappa \in \mathbb{R}$ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

iii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + 4\vec{v}$, αν είναι $\kappa = -\frac{1}{2}$.

110. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$$

να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma}).$$

111. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (3, 2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (4, 3).$$

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} \perp \vec{u} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 1.$$

ii) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\vec{u} \perp (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}).$$

112. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, -4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (3, 1).$$

Να βρείτε:

i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

ii) τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

- 113.** Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα

$$\vec{u} = (2, 1)$$

και έχουν μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{u}$.

- 114.** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (5, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-3, 4)$$

να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

- 115.** Δίνονται τα σημεία

$$A(0, 1) \quad \text{και} \quad B(2, 9).$$

Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$ για το οποίο ισχύει:

$$\text{i)} \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM} \qquad \text{ii)} \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8.$$

- 116.** Δίνονται τα σημεία

$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0) \quad \text{και} \quad \Gamma(1, 0).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

ii) Να βρείτε το σημείο M για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{\Gamma M} = \vec{0}.$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{M\Gamma}.$$

- 117.** Δίνεται το τραπέζιο $OAB\Gamma$ με

$$O(0, 0), A(x, 0), B(2, 8) \quad \text{και} \quad \Gamma(0, 8)$$

όπου x σταθερός θετικός αριθμός. Αν για το μέσο M της $O\Gamma$ ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB},$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad x = 8 \qquad \text{ii)} \quad \overrightarrow{O\Gamma}^2 = 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}.$$

118. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha} = (-\sqrt{3}, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1, \sqrt{3}).$$

119. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (2, 0) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\kappa, \sqrt{3}).$$

Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει:

$$\text{i) } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \qquad \text{ii) } \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

120. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 3 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Αν είναι $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε:

- i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$
- ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$
- iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

121. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 3, \quad |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Αν είναι $\vec{u} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να βρείτε:

- i) τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$
- ii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$
- iii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$.

122. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1+x, 1-x),$$

όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αν $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία φ τέτοια,

ώστε $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ να βρείτε:

- i) το διάνυσμα $\vec{\beta}$
- ii) τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

123. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2.$$

i) Να βρείτε τις γωνίες

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad \text{και} \quad (\vec{\beta}, \vec{\gamma}).$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

124. Δίνεται τρίγωνο ABΓ τέτοιο, ώστε

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{AG}| = 3 \quad \text{και} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{4}.$$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$

ii) $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA}$

iii) $\overrightarrow{AB}^2$

iv) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG}$.

125. Δίνεται τρίγωνο ABΓ τέτοιο, ώστε

$$|\overrightarrow{AB}| = 1, \quad |\overrightarrow{AG}| = 2 \quad \text{και} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{3}.$$

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

ii) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BG}$.

iii) Έστω M το μέσον της BG και σημείο N τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AG} \quad \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MN}.$$

126. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία

$$A(2, 3), \quad B(1, 1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2 + 2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A

ii) $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

127. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AD} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

ii) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΑΒΓΔ.

128. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε:

$$|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Αν είναι $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να βρείτε:

i) το $|\vec{\gamma}|$ **ii)** τις γωνίες $\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right)$ και $\left(\vec{\beta}, \vec{\gamma} \right)$.

129. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, -4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (0, 1).$$

i) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{u} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 4.$$

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

130. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (-1, 2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (4, 7).$$

i) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

131. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 - |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$$

να αποδείξετε ότι

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 2.$$

132. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

ii) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

iii) $\vec{\alpha} = \frac{1}{2} \vec{\beta}$

iv) $\vec{\gamma} = -3\vec{\alpha}.$

133. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$

ii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2}$

iii) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -\frac{9}{2}.$

134. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -\frac{1}{2}$

ii) $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| = \sqrt{3}.$

- 135. i)** Να αποδείξετε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2.$$

- ii)** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 1,$$

να αποδείξετε ότι

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}.$$

- 136.** Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

- iii)** αν ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4,$$

τότε

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

- iv)** αν ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ρ και ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} = \vec{0},$$

τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

- 137.** Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0.$$

- i)** Να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

- ii)** Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

138. Έστω δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = \frac{5}{2} \qquad \beta) \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{3}{4}.$$

ii) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι $\theta = \frac{\pi}{3}$, τότε:

$$\alpha) \quad \text{να αποδείξετε ότι } (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 1$$

$$\beta) \quad \text{να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ και } \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}.$$

139. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii) Αν για το διάνυσμα $\vec{\delta}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$(\vec{\delta} - \vec{\beta}) // \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad |\vec{\delta}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad \vec{\delta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta} \qquad \beta) \quad \vec{\alpha} \perp \vec{\delta}.$$

140. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία μοναδιαία διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -3.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$$

$$\text{ii)} \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$$

$$\text{iii)} \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

141. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$A(0, 3), B(-9, 0) \text{ και } \Gamma(\gamma, 0)$$

όπου γ σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός. Αν ισχύει η σχέση

$$|\overrightarrow{AB}| = 3|\overrightarrow{A\Gamma}|,$$

τότε:

i) να βρείτε την τιμή του γ

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$$

iii) να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta B} \perp \overrightarrow{\Delta E}$.

142. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OAB\Gamma$ με

$$O(0, 0), A(4, 0), B(4, \kappa)$$

και $\Gamma(0, \kappa)$, όπου κ σταθερός θετικός αριθμός. Θεωρούμε το σημείο Δ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{O\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta B}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $\left(3, \frac{3\kappa}{4}\right)$

ii) αν E είναι το μέσον του OA και ισχύει η σχέση, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \perp \overrightarrow{\Delta E}$, τότε το ορθογώνιο $OAB\Gamma$ είναι τετράγωνο.

143. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$A(0, 4), B(2, 0) \text{ και } \Gamma(\alpha, \beta)$$

και τέτοιο, ώστε οι διάμεσοί του $B\Delta$ και ΓE να είναι κάθετες μεταξύ τους.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + \beta^2 = 5\alpha - 2\beta + 4$

ii) $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 5(B\Gamma)^2$.

144. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3, \quad \vec{\alpha} \perp \vec{x} \quad \text{και} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{x} + 2 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $\vec{x} \neq \vec{0}$
- ii) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά
- iii) αν ισχύει η σχέση $\vec{x} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$, τότε $\kappa + 3\lambda = 0$.

145. Έστω A και B δύο σημεία του επιπέδου τέτοια, ώστε

$$(AB) = 8.$$

- i) Αν K είναι το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο M του επιπέδου ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MK}|^2 - 16.$$

- ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9.$$

146. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (1, 3) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x, y)$$

τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

- i) Να αποδείξετε ότι $x = -3y$.
- ii) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{u}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \text{και} \quad |\vec{u}| = \sqrt{20}.$$

147. i) Να αποδείξετε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|.$$

- ii) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$x^2 + y^2 = 5,$$

να αποδείξετε ότι

$$|2x + y| \leq 5.$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 2y$.

148. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (5, 4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1, -1).$$

Να βρείτε:

- i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$
- ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$.

149. Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (4, 6) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x, x + 6),$$

όπου x σταθερός πραγματικός αριθμός τέτοια, ώστε

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = (2, 3).$$

- i) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.
- iii) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$

150. i) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα, να αποδείξετε ότι

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}.$$

ii) Δίνεται το παραλληλόγραμμο OABΓ, όπου O η αρχή των αξόνων,

$$A(8, 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-1, 4).$$

- α) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο OABΓ είναι ορθογώνιο.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.
- γ) Αν Δ είναι η προβολή του A πάνω στην OB, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}.$$

151. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}|^2 = 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}.$$

Αν για κάποιον πραγματικό αριθμό λ ισχύει η σχέση

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha},$$

να αποδείξετε ότι:

i) τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους

ii) $\lambda = 2$

iii) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2$

iv) $2|\vec{\alpha}| \leq |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|.$

152. Έστω O η αρχή των αξόνων και A, B, Γ τρία σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{O\Gamma} = (-1, 2) \quad \text{και} \quad \text{προβ}_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{O\Gamma} = (2, 1).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}.$$

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

153. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{4}|\vec{\alpha}|^2 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|.$$

Αν για κάποιον πραγματικό αριθμό λ ισχύει η σχέση

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = \frac{1}{\lambda}\vec{\alpha},$$

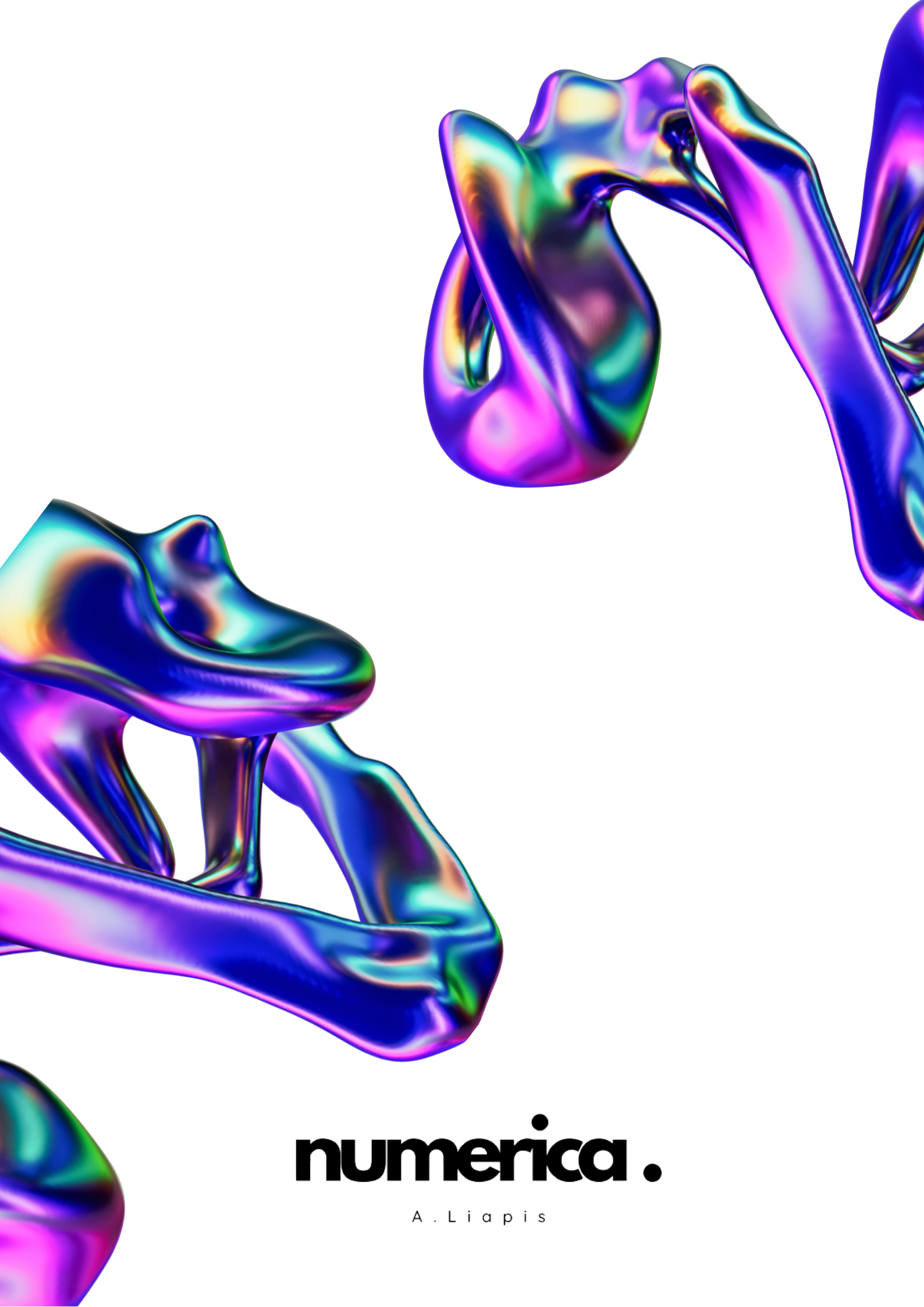
να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda = 2$

ii) $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$

iii) $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$

iv) $\left(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}.$



numerica .

A . L i a p i s