



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Ευθεία στο Επίπεδο

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1

Εξίσωση Ευθείας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης:
- i) της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία
 $A(1,7)$ και $B(2,-3)$
- ii) της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία
$$\omega = \frac{\pi}{4}$$
- iii) της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία AB .
2. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία:
- i) $A(1,3)$ και $B(5,7)$ ii) $A(-2,5)$ και $B(4,-1)$
- iii) $A(8,-2)$ και $B(8,9)$ iv) $A(4,-7)$ και $B(-5,-7)$.
3. Δίνονται τα σημεία
 $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(-4,7)$.
- i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών AB , $B\Gamma$ και ΓA .
- ii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$ και:
- i) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία
$$\omega = \frac{3\pi}{4}$$
- ii) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα
$$\vec{\delta} = (1,3)$$
- iii) είναι κάθετη προς το διάνυσμα
$$\vec{\delta} = (5,0)$$
.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και:

- i) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$
- ii) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
- iii) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (0, 4)$
- iv) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(4, 0)$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$ και:

- i) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$
- ii) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$
- iii) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$
- iv) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 3)$

7. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία

$$A(2, 4), B(0, -3) \text{ και } \Gamma(8, 1)$$

Να βρείτε:

- i) την εξίσωση του ύψους του $A\Delta$
- ii) την εξίσωση της διαμέσου AM
- iii) την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$.

8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$A(2, 7), B(1, 3) \text{ και } \Gamma(5, 1).$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλη προς τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$.

9. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία

$$A(0, 4), B(-1, 0), \Gamma(3, -2) \text{ και } \Delta(5, 6)$$

- i) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του $AB\Gamma\Delta$.

10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν είναι

$$AB: y = 3x + 1, A\Delta: y = x + 3 \text{ και } \Gamma(3, -2),$$

να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - ii) την εξίσωση της ευθείας ΓB
 - iii) τις συντεταγμένες της κορυφής B
 - iv) την εξίσωση της διαμέσου BM
11. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με

$$AB: y = x - 1, A\Delta: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \text{ και } \Gamma(7, 3).$$

Να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - ii) τις εξισώσεις των ευθειών ΓB και $\Gamma\Delta$
 - iii) τις συντεταγμένες της κορυφής B .
12. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο το σημείο $K(4, 1)$. Οι πλευρές AB και $A\Delta$ έχουν εξισώσεις

$$y = -x + 8 \text{ και } y = 2x - 7$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες του σημείου A
 - ii) τις συντεταγμένες του σημείου Γ
 - iii) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου τα ύψη $B\Delta$ και ΓE έχουν εξισώσεις

$$y = 2x - 15 \text{ και } y = 7x - 35$$

αντίστοιχα και η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 2)$. Να βρείτε:

- i) τις εξισώσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$
- ii) τις συντεταγμένες της κορυφής B
- iii) την εξίσωση της διαμέσου AM .

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου η μία διαγώνιος έχει εξίσωση

$$y = \frac{2}{3}x + 4.$$

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις

$$y = x - 2 \quad \text{και} \quad y = 2x + 4$$

αντίστοιχα.

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Α.
 - ii) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα διαγώνιος είναι η ΒΔ.
 - iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.
 - iv) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε
 $A(0, -4)$, $B(4, -12)$ και $\Gamma(7, 0)$.
- Να βρείτε:
- i) τις εξισώσεις των ευθειών ΔΑ και ΔΓ
 - ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
 - iii) την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα.
16. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad \text{και} \quad y = \frac{3}{2}x + 2$$

αντίστοιχα.

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.
- ii) Αν η εξίσωση της μιας διαγωνίου του ΑΒΓΔ είναι

$$y = -\frac{5}{2}x + 2,$$

να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες του σημείου Β
- β) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

17. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία

$$A(-1, \alpha), \quad B(7, \beta) \quad \text{και} \quad \Gamma(1, 3).$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\beta = 12 - 3\alpha.$$

- ii) Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ευθεία

$$\eta: y = 2x,$$

τότε:

- α)** να υπολογίσετε τις τιμές των α και β
β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

18. Δίνονται τα σημεία

$$A(-2, 3), \quad B(0, 1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2, -1)$$

- i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά
 ii) Να βρείτε την προβολή του σημείου $K(7, 0)$ πάνω στην ευθεία AB .

19. Δίνεται το σημείο $A(5, 1)$ και η ευθεία

$$\varepsilon: y = 2x - 4.$$

Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)
 ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (ζ)
 iii) την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε)
 iv) το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) .

20. Δίνονται τα σημεία

$$A(-1, 2), \quad B(2, 3) \quad \text{και} \quad \Gamma(5, 0).$$

- i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
 ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
 iii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$.
 iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

21. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$A(0,3), B(7,0) \text{ και } \Gamma(6,17).$$

- i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- ii) Να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας $A\Gamma$ για το οποίο ισχύει η σχέση $(B\Delta) = (B\Gamma)$.
- iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $B\Gamma\Delta$.

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(0,4)$, $\Gamma(9,1)$ και εσωτερική διχοτόμο $B\Delta$ την ευθεία με εξίσωση

$$y = x.$$

- i) Ποιο είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς τη διχοτόμο $B\Delta$;
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
- iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

23. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2,8)$. Αν οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν εξισώσεις

$$y = x \quad \text{και} \quad y = 4$$

αντίστοιχα, να βρείτε:

- i) το συμμετρικό A' του σημείου A ως προς την ευθεία $B\Delta$
- ii) το συμμετρικό A'' του σημείου A ως προς την ευθεία ΓE
- iii) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

24. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(2,5)$ και η μία διαγώνιος έχει εξίσωση

$$y = x - 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα διαγώνιος είναι η $B\Delta$.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.
- iii) Να βρείτε το κέντρο του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.
- iv) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .

25. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με

$$A(0,2) \quad \text{και} \quad \Gamma(4,0).$$

Η κορυφή B βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Να βρείτε:

- i) το κέντρο K του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$
- ii) την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$
- iii) τις κορυφές B και Δ
- iv) το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

26. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1,1)$ και $\Gamma(3,5)$.

Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της ευθείας $B\Delta$
- ii) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ .

27. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 3x - 1.$$

Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε το σημείο M να είναι το μέσο του τμήματος AB .

- i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

28. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : y = x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $M(5,3)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) στα σημεία A , B αντίστοιχα έτσι, ώστε το σημείο M να είναι το μέσο του τμήματος AB .

- i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

29. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(1,4)$ και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
30. Δίνεται το σημείο $K(2,3)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο K και σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραπάνω τριγώνου.
31. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση
- $$y = \lambda x + \kappa$$
- η οποία διέρχεται από τα σημεία
- $$O(0,0) \quad \text{και} \quad A(2,1).$$
- Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ .
 - Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία (ε) και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = 16$ τ.μ.
32. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις
- $$y = x + 1$$
- και
- $$y = 2x - 1$$
- αντίστοιχα. Να βρείτε:
- το σημείο τομής M των ευθειών (ε_1) και (ε_2)
 - την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A και B , ώστε το άθροισμα της τεταγμένης του A και της τεταγμένης του B να είναι ίσο με 12.
33. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta: y = -2x$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ.

34. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3, 4)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.

35. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (5, 3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα τέτοια, ώστε η διαφορά της τετμημένης του σημείου A από την τεταγμένη του σημείου B να είναι ίση με 4.

36. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$ και τέμνει τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = -x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -x + 1$$

στα σημεία A και B αντίστοιχα τέτοια, ώστε $(AB) = 1$.

37. Δίνεται το σημείο $A(2, -1)$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να βρείτε:

i) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(AM)^2 = 3 + (OM)^2$$

ii) το σημείο B του παραπάνω γεωμετρικού τόπου το οποίο απέχει από το σημείο O ελάχιστη απόσταση.

38. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 0), \quad B(0, -1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2, -1).$$

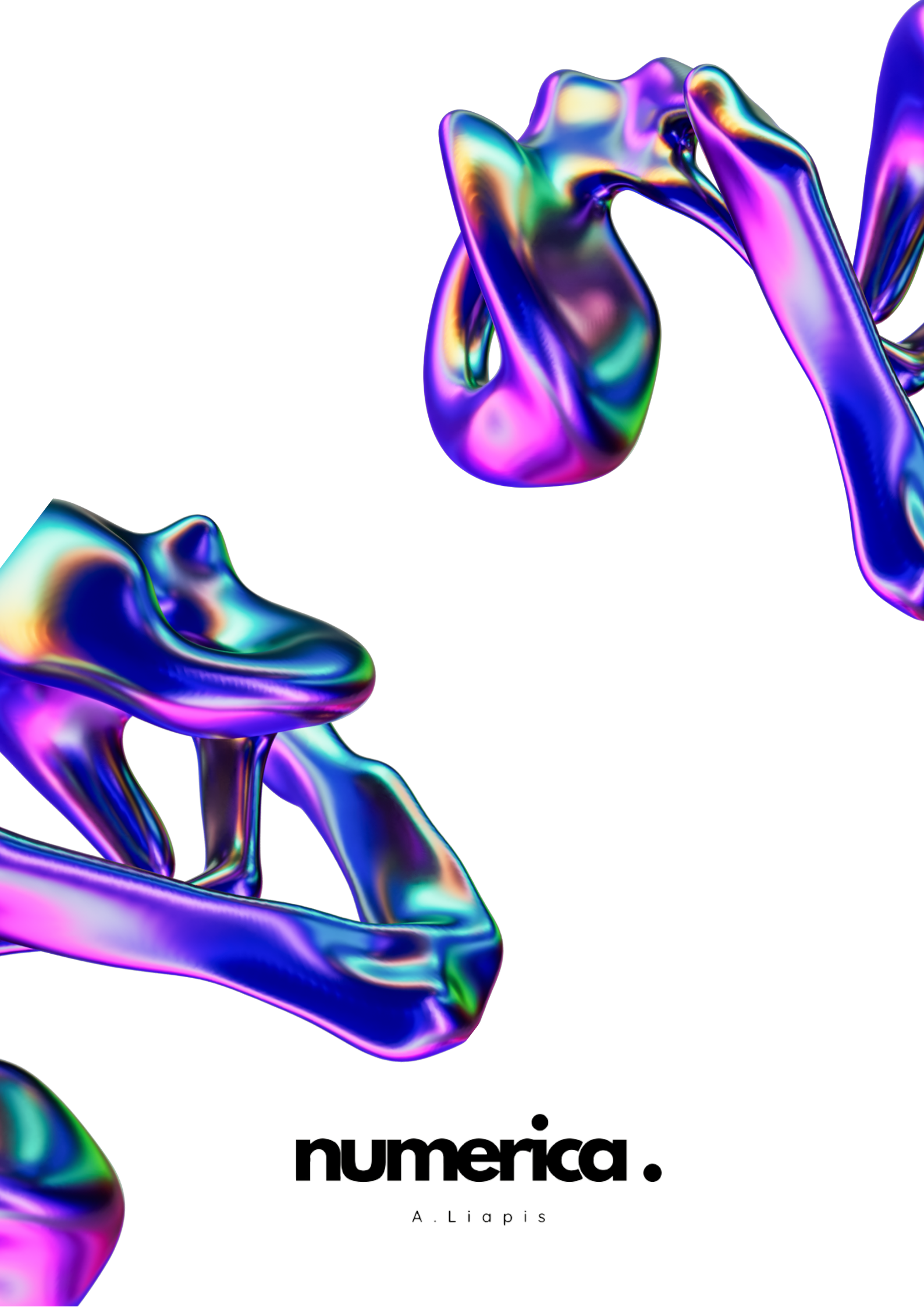
i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$2(M\Gamma)^2 = 2 + (MA)^2 + (MB)^2$$

είναι μία ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο A .

ii) Να βρείτε το συμμετρικό B' του σημείου B ως προς την ευθεία (ε) .

- 39.** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $M(\lambda + 5, 2\lambda + 3)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι μία ευθεία (ε) .
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) και τέτοια, ώστε οι άξονες να αποκόπτουν από αυτή τμήμα μήκους $\sqrt{5}$.
- 40.** Δίνονται τα σημεία
- $$A(2, 3) \text{ και } B(2\kappa + 1, \kappa) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει σε σταθερή ευθεία.
 - Να βρείτε την προβολή M του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) .
 - Να βρείτε το συμμετρικό Γ του σημείου A ως προς το σημείο M .
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 - Να υπολογίσετε την τιμή του κ , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο.
- 41.** Έστω η ευθεία
- $$\varepsilon : y = x$$
- και το σημείο
- $$M(2\lambda, \lambda + 3), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Αν N είναι το συμμετρικό του σημείου M ως προς την ευθεία (ε) να αποδείξετε ότι:
- τα σημεία M και N ανήκουν αντίστοιχα σε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2)
 - οι ευθείες (ε) , (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- 42.** Δίνονται οι ευθείες
- $$\varepsilon_1 : y = x + 2\lambda \text{ και } \varepsilon_2 : y = 2x + \lambda,$$
- όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.
- Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .
 - Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μία σταθερή ευθεία (ε) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



numerica.

A . L i a p i s