Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Η Ευθεία στο Επίπεδο

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2 — Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

43. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x+(\alpha-1)y-4\alpha+5=0,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

44. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha+2)x+(\alpha^2-9)y+\alpha^2-3\alpha+2=0,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η παραπάνω ευθεία:

α) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

β) είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

45. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2-1)x+(\alpha^2+\alpha)y+(\alpha-11)=0\ .$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει:

i) ευθεία

ii) ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

iii) ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$

iv) ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο P(1, 1).

46. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$\lambda x+(\lambda-\mu)y+(\lambda+\mu-4)=0$$

όπου λ, μ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\lambda\neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ii) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την ευθεία (η) με εξίσωση $y=2x$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $3\lambda=2\mu$

β) να υπολογίσετε τους λ και μ έτσι, ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1.

47. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με εξισώσεις

$$x + y - 9 = 0 \quad \text{και} \quad 3x - 2y - 2 = 0$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Αν (ε) είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x + 2y - 4 = 0,$$

να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη προς την ευθεία (ε)

β) το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει από το σημείο Α ελάχιστη απόσταση.

48. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

i) $y^2 - xy = 0$

ii) $xy - 2x = y - 2$

iii) $(x + y)^2 - 4 = 0$

iv) $x^2 - 2y^2 + xy = 0$.

49. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με εξισώσεις

$$x - 2y - 2 = 0 \quad \text{και} \quad 2x + 3y - 11 = 0$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Δίνεται επίσης η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$\alpha x + (1 - \alpha) y + \beta = 0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία (η) με εξίσωση

$$3x + y + 1 = 0.$$

β) Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ευθεία (ε) να είναι κάθετη στο διάνυσμα

$$\vec{u} = (-1, 4).$$

50. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$2x-7y+6=0.$$

i) Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας (ε) το οποίο ισαπέχει από τα σημεία

$$A(2,-1) \text{ και } B(1,0).$$

ii) Αν το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς την ευθεία $y=x$ ανήκει στην ευθεία (η) με εξίσωση

$$2x-\alpha y+\alpha^2+2\alpha=3,$$

να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=1$

β) η ευθεία ΟΑ είναι κάθετη στην ευθεία (η), όπου $O(0,0)$.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(4,7)$ και οι εξισώσεις των υψών του

$$BE: y=x \quad \text{και} \quad \Gamma Z: x+2y-14=0.$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

52. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $y=5x+2$, το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση $y=-3x+10$ και το ύψος ΒΕ έχει εξίσωση $5x-3y+6=0$.

Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β

iii) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

iv) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(0,4)$ και οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ έχουν εξισώσεις

$$x-5y+2=0 \quad \text{και} \quad 4x+7y-10=0$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Γ

iii) την εξίσωση του ύψους ΑΖ του τριγώνου ΑΒΓ

iv) το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει από την κορυφή Α τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma(1,0)$, η διάμεσός του $AM: 4x+13y+41=0$ και η διχοτόμος του $AZ: x+2y+4=0$. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ΑΒ

ii) τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

55. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1:\ x+2y-5=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ x-3y+4=0.$$

i) Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα.

ii) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

56. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1: y=\frac{1}{5}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 2x+3y+5=0.$$

57. Να βρείτε την αμβλεία γωνία των ευθειών

$$\varepsilon_1: x-2y+3=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 3x-y+1=0.$$

58. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (η) με εξισώσεις

$$y=\sqrt{3}x+1 \quad \text{και} \quad y=-\sqrt{3}x+4$$

αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα

$$\vec{\alpha}=\left(1,\sqrt{3}\right) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}=\left(1,-\sqrt{3}\right)$$

είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε) και (η) αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε) και (η).

59. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + xy - 6y^2 = 0 \ .$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2).

ii) Να βρείτε την αμβλεία γωνία ω των ευθείων (ε_1) και (ε_2).

60. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$\mu x + (2-\mu)y + 4 = 0$$

και

$$(\mu - 2)x + 3y - 2 = 0$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε να είναι παράλληλα προς τις ευθείες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του μ για την οποία οι ευθείες (ε_1), (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1), (ε_2) είναι μεταξύ τους κάθετες.

iv) Για $\mu = 3$, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζεται από τις ευθείες (ε_1), (ε_2) και τον άξονα $x'x$.

61. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \kappa x + (\kappa - 1)y + (4 - \kappa) = 0$$

και

$$\varepsilon_2 : (\kappa - 3)x + \kappa y + (\kappa + 1) = 0$$

όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός. Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους:

i) παράλληλες

ii) κάθετες.

62. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha : \left(\alpha^2+1\right)x+\left(\alpha+1\right)y-\alpha^2-2\alpha-3=0,\ \ \alpha\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $O\left(0,0\right)$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ παράλληλη στον άξονα $x'x$

iii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

63. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha^2+2\alpha+2\right)x+\left(\alpha^2+\alpha-1\right)y-\left(3\alpha^2+4\alpha\right)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **(1)** παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in R$.

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε εκείνη την ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση **(1)** και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta : y=-x$.

64. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha+1\right)x+\left(\alpha-3\right)y+2\alpha-2=0\,, \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή $\left(\varepsilon_\alpha\right)$.

ii) Να βρείτε την ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $P\left(3,-1\right)$.

iii) Να βρείτε την ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία σχηματίζει με τους αρνητικούς ημιάξονες Ox' και Oy' τρίγωνο εμβαδού $\dfrac{8}{3}$ τ.μ..

iv) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών που βρήκατε στα ερωτήματα **ii)** και **iii)**.

v) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

65. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\alpha^2+\alpha+2\right)x+\left(\alpha-3\right)y-\left(3\alpha^2+5\alpha\right)=0, \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ η οποία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$.

iii) Να βρείτε ποια από τις ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία

$$\eta:\ x+2y+5=0.$$

66. Σημείο Ρ του επίπεδου έχει τετμημένη α και ανήκει στην ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y=x+1.$$

i) Να βρείτε τις προβολές Α και Β του σημείου Ρ πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ με εξίσωση

$$-\alpha x+\left(\alpha+1\right)y-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=0$$

είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

iv) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $\left(\varepsilon_\alpha\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

67. Δύο σημεία

$$A\left(\alpha,0\right) \text{ και } B\left(0,\beta\right)$$

κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ii) Αν ισχύει η σχέση

$$\left(OA\right)+\left(OB\right)=2,$$

να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$\alpha x+\left(\alpha-2\right)y+4-4\alpha=0$$

β) η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\alpha>0$.

68. Δύο σημεία

$$A(\alpha, 0) \text{ και } B(0,\beta) \text{ με } \alpha\beta \neq 0$$

κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

ii) αν ισχύει η σχέση

$$\frac{5}{\alpha}+\frac{7}{\beta}=1,$$

τότε η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο.

69. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$x+y+\lambda-3=0$$

και

$$2x-y-4\lambda=0$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μία σταθερή ευθεία (ε) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

70. Δίνεται το σημείο $K(3,1)$ και τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ τα οποία κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα έτσι, ώστε

$$\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{KB}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\beta = 10-3\alpha$

ii) το μέσο M του τμήματος AB κινείται στο εσωτερικό ενός ευθυγράμμου τμήματος.

71. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon : 3x + y + \alpha = 0$$

και

$$\eta : x + \beta y - 5 = 0$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α(1, 2), να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β

ii) το σημείο τομής Β των ευθειών (ε) και (η)

iii) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$(AM)^2 - (BM)^2 = 2 .$$

72. Δίνονται τα σημεία

Α(0, 2) και Β(2, 4).

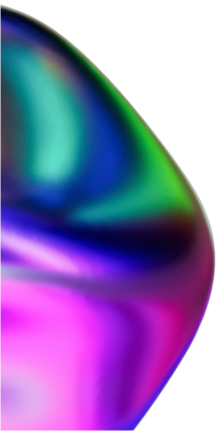
i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM'} = 8,$$

όπου Μ' είναι το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς τον άξονα $x'x$, είναι το σύνολο των σημείων των ευθειών

$$\varepsilon_1 : y = -x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = x - 2.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) και από το μέσο του τμήματος ΑΒ.



numerica.

A.Liapis