



# Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η Ευθεία στο Επίπεδο

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.3

Εμβαδόν Τριγώνου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**numerica.**

A . L i a p i s



**Προτεινόμενες Ασκήσεις**

**73.** Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M(7, -5)$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση:

**i)**  $3x + 4y + 9 = 0$

**ii)**  $x + 2y + 1 = 0$ .

**74.** Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  με εξισώσεις

$$4x - 3y - 11 = 0 \quad \text{και} \quad -8x + 6y + 7 = 0.$$

**i)** Να αποδείξετε ότι  $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$ .

**ii)** Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  με την ευθεία  $x = 2$ .

**iii)** Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

**75.** Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  με εξισώσεις

$$y = 2x - 2 \quad \text{και} \quad y = 2x - 6.$$

Να βρείτε:

**i)** το σημείο του άξονα  $x'x$  το οποίο ισαπέχει από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$

**ii)** των εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

**76.** Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : (\alpha - 1)x + 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : (3 - \alpha)x + 2y = 0$$

με  $\alpha \in \mathbb{R}$ , οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

**i)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

**ii)** Να υπολογίσετε την απόσταση  $d$  των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

**iii)** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

77. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση

$$3x + 4y + 7 = 0$$

η οποία είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2 μονάδες.

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .
- ii) Ένα σημείο  $M$  ανήκει στην ευθεία  $y = x$  και βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Να βρείτε τις συνταγμένες του  $M$  έτσι, ώστε αυτό να απέχει από κάποια από τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  απόσταση ίση με 2 μονάδες.
78. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{3}{4}$$

και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3 μονάδες.

79. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση

$$3x + 4y = 0.$$

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία  $(\varepsilon)$  και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 4 μονάδες.
- ii) Ποια από τις ευθείες που βρήκατε στο ερώτημα i) βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο  $A(-3, 2)$ ;
80. Δίνονται το σημείο  $A(0, 1)$  και η ευθεία

$$\eta: x + 2y - 7 = 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  η οποία είναι κάθετη προς την  $(\eta)$  και απέχει από το σημείο  $A$  απόσταση ίση με  $\sqrt{5}$ .

81. Δίνονται το σημείο  $A(-1, -3)$  και η ευθεία

$$\varepsilon: x + y + 2 = 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta$  οποία είναι παράλληλη προς την  $(\varepsilon)$  και ισαπέχει από το σημείο  $A$  και την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

- 82.** Μία ευθεία ( $\varepsilon$ ) διέρχεται από το σημείο  $A(4,7)$  και ισαπέχει από τα σημεία  $B(1,5)$  και  $\Gamma(3,1)$ .
- i)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) δεν είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ .
  - ii)** Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) σχηματίζει οξεία γωνία  $\omega$  με τον άξονα  $x'x$ , τότε:
    - α)** να βρείτε την εφω
    - β)** να αποδείξετε ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) διέρχεται από το μέσο  $M$  του τμήματος  $B\Gamma$ .
- 83.** Δίνεται το σημείο  $A(-5,5)$ . Να βρείτε:
- i)** την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A$  και :
    - α)** είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$
    - β)** έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$
  - ii)** τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A$  και απέχουν από το σημείο  $B(-3,4)$  απόσταση ίση με 1 μονάδα.
- 84.** Δίνονται οι ευθείες ( $\varepsilon$ ) και ( $\eta$ ) με εξισώσεις
- $$x + y - 3 = 0 \quad \text{και} \quad x - 4y + 2 = 0$$
- αντίστοιχα. Να βρείτε:
- i)** τις συντεταγμένες του σημείου τομής  $A$  των ευθειών ( $\varepsilon$ ) και ( $\eta$ )
  - ii)** την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A$  και:
    - α)** είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$
    - β)** έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$
  - iii)** τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο  $A$  και απέχουν από την αρχή των αξόνων  $O$  απόσταση ίση με 2 μονάδες.
- 85.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta$  οποία διέρχεται από το σημείο  $A(1,0)$  και απέχει από το σημείο  $B(3,1)$  απόσταση ίση με 2.
- 86.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $P(1,3)$  και ισαπέχει από τα σημεία  $A(-9,1)$  και  $B(9,-17)$ .
- 87.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\eta$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(3,5)$  και ισαπέχει από τα σημεία  $A(2,0)$  και  $B(3,1)$ .

88. Μία ευθεία ( $\epsilon$ ) με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , διέρχεται από το σημείο  $M(1,3)$  και σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα  $x'x$ . Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ( $\epsilon$ ) με τους άξονες
  - την εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) αν είναι γνωστό ότι αυτή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό  $E = 2$  τ.μ..
89. Δίνονται οι ευθείες ( $\epsilon$ ) και ( $\eta$ ) με εξισώσεις
- $$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad 3x - 4y + 21 = 0$$
- Να βρείτε τα σημεία της ευθείας ( $\epsilon$ ), τα οποία απέχουν από την ευθεία ( $\eta$ ) απόσταση ίση με 4.
  - Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων που βρήκατε στο ερώτημα i).
90. Δίνονται οι ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ) με εξισώσεις
- $$12x - 5y + 10 = 0 \quad \text{και} \quad 3x + 4y - 8 = 0.$$
- Να βρείτε:
- το σημείο τομής  $A$  των ευθειών ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ )
  - τα σημεία του άξονα  $x'x$  τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ )
  - τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ).
91. Δίνεται η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση
- $$12x - 5y + 36 = 0.$$
- Να βρείτε:
- τα σημεία τομής  $A$  και  $B$  της ευθείας ( $\epsilon$ ) με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα
  - το σημείο  $\Gamma$  του θετικού ημιάξονα  $Oy$ , το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων  $O$  και την ευθεία ( $\epsilon$ )
  - την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{O\hat{A}B}$ .
92. Δίνονται τα σημεία
- $$A(-1,0), \quad B(2,-1) \quad \text{και} \quad \Gamma(4,3)$$
- Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - Αν το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο να υπολογίσετε το εμβαδό του.

93. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 5)$ ,  $B(0, 2)$  και  $\Gamma(4, 0)$ .
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  αποτελούν κορυφές τριγώνου.
  - Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $AD$ .
  - Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $AM$ .
  - Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
94. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1, -4)$ ,  $B(2, 1)$  το οποίο έχει εμβαδό  $E = 8$  τ.μ. Να βρείτε το σημείο  $\Gamma$  αν είναι γνωστό ότι αυτό βρίσκεται στην ευθεία  $\varepsilon: y = -2x$  και οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί.

95. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με

$$A(3, 1) \quad \text{και} \quad B(1, -3).$$

Το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon: y = x$  και βρίσκεται κάτω από την ευθεία  $\eta: y = 4$ .

Αν το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = 3$  τ.μ., τότε:

- να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$
- να αποδείξετε ότι  $AG \perp (\varepsilon)$ .

96. Ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $(AB) = (A\Gamma)$  έχει κορυφές τα σημεία

$$A(x_0, y_0), B(0, -1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2, 5).$$

- Να αποδείξετε ότι

$$x_0 + 3y_0 - 7 = 0.$$

- Αν το σημείο  $A$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση

$$y = x + 5,$$

να βρείτε:

- τις συντεταγμένες του σημείου  $A$
- το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

97. Δίνονται τα σημεία

$$A(-1,0), B(3,0) \text{ και } \Gamma(1,\kappa) \text{ με } \kappa > 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α)  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 4\kappa$

β) τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii) Αν το εμβαδό του τριγώνου ABΓ είναι

$$E = 4\sqrt{3} \text{ τ.μ.,}$$

τότε:

α) να βρείτε την τιμή του κ

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

98. Ενός παραλληλόγραμμου ABΓΔ οι κορυφές A και B έχουν συντεταγμένες  $(-4,1)$  και  $(6,0)$  αντίστοιχα. Το κέντρο του ABΓΔ είναι το σημείο  $K(3,2)$ .

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του ABΓΔ.

99. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ με  $A(2,1)$ . Η κορυφή B ανήκει στην ευθεία  $x = 4$  και η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση

$$x - 2y + 15 = 0.$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B.

ii) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του ABΓΔ.

100. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με  $A(-1,2)$  και  $\Gamma(3,-2)$ .

i) Να βρείτε το κέντρο K του ρόμβου ABΓΔ.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ.

iii) Αν η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση  $y = 3x - 11$ , να βρείτε:

α) τις κορυφές B και Δ

β) το εμβαδό του ρόμβου ABΓΔ.



101. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση

$$x + y - 7 = 0$$

και τα σημεία  $A(-1,2)$  και  $B(5,-8)$ .

- i) Να βρείτε το σημείο  $M$  της ευθείας  $(\varepsilon)$  το οποίο ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $B$ .
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $MAB$ .

102. Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$  και  $B(7,6)$ .

- i) Να βρείτε το σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$  για το οποίο το εμβαδό του τριγώνου  $MAB$  είναι ίσο με 12 τ.μ.
- ii) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου  $M$  από την ευθεία  $AB$ .

103. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,0) \quad \text{και} \quad B(5,1)$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(MAB) = 2$$

είναι δύο ευθείες  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες

- ii) η ευθεία  $AB$  είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

104. Δίνονται τα σημεία

$$A(1,1) \quad \text{και} \quad B(5,3).$$

Να βρείτε:

- i) το σημείο  $\Gamma$  του θετικού ημιάξονα  $Ox$ , για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(AB\Gamma) = 5 \text{ τ.μ.}$$

- ii) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(ABM) = 2(OAB),$$

όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

105. Ευθεία  $(\varepsilon)$  διέρχεται από το σημείο  $M(1,2)$  και σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x'x$ .

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda < 0.$$

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής  $A$  και  $B$  της ευθείας  $(\varepsilon)$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

iii) Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $\lambda$ , το εμβαδό  $E(\lambda)$  του τριγώνου  $OAB$ .

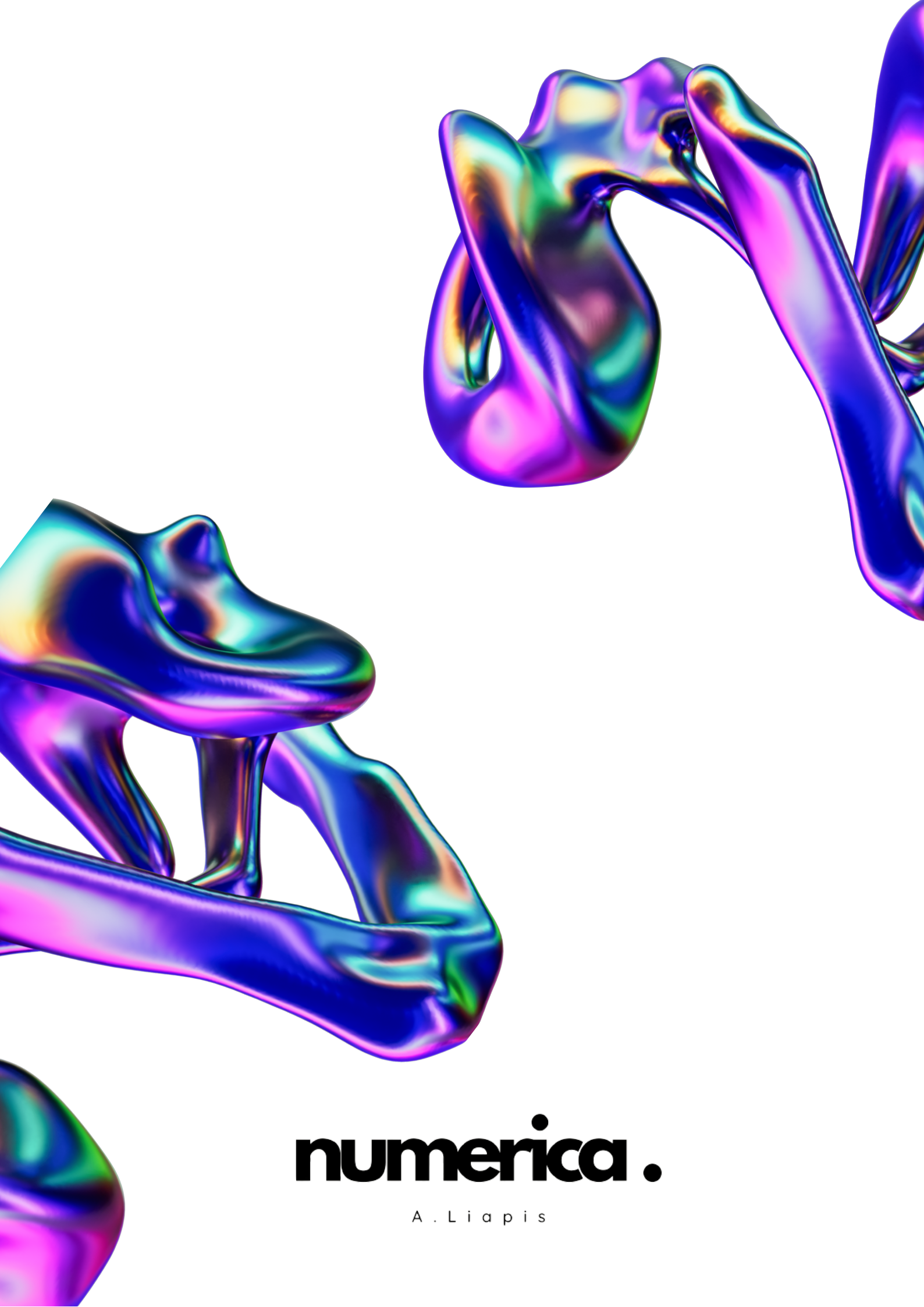
iv) Να αποδείξετε ότι

$$E(\lambda) \geq 4 \text{ για κάθε } \lambda < 0.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

v) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  έτσι, ώστε το εμβαδό  $E(\lambda)$  να είναι ελάχιστο.





**numerica.**

A . L i a p i s