



# Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.1

Ο Κύκλος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**numerica.**

A . L i a p i s



## Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- i) Όταν διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 1)$ .
  - ii) Όταν εφάπτεται στην ευθεία  
 $\varepsilon: 4x - 3y + 10 = 0$ .
2. Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση
- $$x^2 + y^2 = 100.$$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (c) σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- i) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία (ε) με εξίσωση  
 $8x - 6y + 7 = 0$ .
  - ii) Όταν διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{25}{2}, 0\right)$ .
3. Δίνεται το σημείο  $A(1, 2)$  και ο κύκλος (c) με εξίσωση
- $$x^2 + y^2 = 1.$$
- i) Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (c).
  - ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (c) που άγονται από το σημείο A.
4. Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: x + ky = 10$  και ο κύκλος  $c: x^2 + y^2 = \kappa^2 + 1$  όπου  $\kappa$  σταθερός πραγματικός αριθμός.
- i) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $\kappa$ , την απόσταση του κέντρου του κύκλου (c) από την ευθεία (ε).
  - ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$  για τις οποίες η ευθεία (ε):
    - a) εφάπτεται στον κύκλο (c)
    - β) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο (c).

5. Δίνεται ο κύκλος  $(c)$  ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και αποκόπτεται από την ευθεία  $\varepsilon: 3x - 4y - 5 = 0$  χορδή μήκους  $d = 4$ .

Να βρείτε:

- i) την εξίσωση του κύκλου  $(c)$   
 ii) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $(c)$  η οποία ορίζει με τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  τρίγωνο εμβαδού

$$E = \frac{25}{4} \text{ τ.μ.}$$

6. Δίνεται ο κύκλος  $(c)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1$$

και το σημείο του  $P(x_1, y_1)$  με  $x_1 > 0$  και  $y_1 > 0$ .

- i) Να βρείτε τα σημεία  $A$  και  $B$  στα οποία η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  του κύκλου  $(c)$  στο σημείο  $P$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.  
 ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου  $OAB$ , όπου  $O(0, 0)$ , είναι

$$E = \frac{1}{2x_1y_1}$$

- iii) Να αποδείξετε ότι  $E \geq 1$ . Πότε ισχύει η ισότητα;  
 iv) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  έτσι, ώστε το εμβαδό  $E$  να είναι ελάχιστο.

7. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $K(1, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(5, 3)$ .  
 ii) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $A(7, 1)$  και  $B(-3, 5)$ .

8. Ένας κύκλος  $(c)$  εφάπτεται στους θετικούς άξονες  $Ox$  και  $Oy$ .

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του συναρτήσει της ακτίνας του  $\rho$ .  
 ii) Αν ο κύκλος  $(c)$  εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon: x - y - \sqrt{2} = 0$ , να βρείτε την εξίσωσή του.

9. Ένας κύκλος  $(c)$  με κέντρο το σημείο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$  εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon : x + 2y - 3 = 0$$

στο σημείο  $A(1, 1)$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $y_0 = 2x_0 - 1$ .

ii) Αν ο κύκλος  $(c)$  διέρχεται από το σημείο  $B(2, 0)$ , να βρείτε την εξίσωσή του.

10. Ένας κύκλος  $(c)$  έχει κέντρο το σημείο  $K(x_0, y_0)$  και εφάπτεται στις ευθείες:

$$\varepsilon : -x + y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \eta : x - y - 7 = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι  $x_0 - y_0 = 3$ .

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $(c)$ , αν είναι γνωστό ότι αυτός διέρχεται από το σημείο  $A(1, -2)$  και το κέντρο του έχει θετική τετμημένη.

11. Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\eta)$ , με εξισώσεις

$$3x - 4y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad 3x - 4y - 31 = 0$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας  $(\zeta)$  των παραπάνω ευθειών

ii) το σημείο τομής  $K$  της ευθείας  $(\zeta)$  με την ευθεία  $y = -1$

iii) την απόσταση του σημείου  $K$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$

iv) την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο το σημείο  $K$  και αποκόπτει από την ευθεία  $(\varepsilon)$  χορδή μήκους 8 μονάδων.

12. Δίνεται ο κύκλος

$$c_1 : (x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 20.$$

i) Να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho_1$  του κύκλου  $(c_1)$ .

ii) Ένας κύκλος  $(c_2)$  έχει κέντρο το σημείο  $\Lambda(x_0, y_0)$  και εφάπτεται στον κύκλο  $(c_1)$  στο σημείο του  $A(3, 1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι

$$x_0 - 2y_0 = 1.$$

β) Αν ο κύκλος  $(c_2)$  διέρχεται από το σημείο  $B(0, 2)$ , να βρείτε τους  $x_0, y_0$  και την εξίσωση του κύκλου  $(c_2)$ .

- 13.** Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  όταν:
- $c_1 : x^2 + y^2 = 1$  και  $c_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$
  - $c_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$  και  $c_2 : (x-4)^2 + (y-6)^2 = 1$ .
- 14.** Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$  όταν:
- $c_1 : x^2 + (y+1)^2 = 9$  και  $c_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1$
  - $c_1 : x^2 + y^2 = 36$  και  $c_2 : (x-5)^2 + y^2 = 1$ .
- 15.** Δίνεται ο κύκλος  $(c_1)$  ο οποίος έχει κέντρο το σημείο  $K(4, 2)$  και διέρχεται από το σημείο  $M(6, 1)$ . Να βρείτε:
- την εξίσωση του κύκλου  $(c_1)$
  - την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$  του κύκλου  $(c_1)$  στο σημείο  $M$
  - την εξίσωση του κύκλου  $(c_2)$  ο οποίος είναι ομόκεντρος του κύκλου  $(c_1)$  και αποκόπτει από την ευθεία  $(\varepsilon)$  χορδή  $AB$  μήκους  $(AB) = 4$ .
- 16.** Δίνεται ο κύκλος  $(c_1)$  με εξίσωση
- $$(x-7)^2 + y^2 = 4.$$
- Να βρείτε:
- το σημείο  $A$  του κύκλου  $(c_1)$  το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων  $O$  ελάχιστη απόσταση
  - την εξίσωση του κύκλου  $(c_2)$  ο οποίος εφάπτεται του κύκλου  $(c_1)$  στο σημείο  $A$  και διέρχεται από το σημείο  $B(3, 4)$ .
- 17.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο  $A(3, 2)$ , έχει το κέντρο του στην ευθεία  $\varepsilon : y = 2x$  και εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ .
- 18.** Ένα σημείο  $M$  βρίσκεται στην ευθεία  $\varepsilon : 5x - 12y + 23 = 0$  και ένα σημείο  $N$  βρίσκεται στον κύκλο
- $$c : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1.$$
- Να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $(c)$ .
  - Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου  $K$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$ .
  - Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης  $(MN)$ .

19. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1 : x^2 + y^2 = 4 \quad \text{και} \quad c_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  βρίσκονται ο καθένας εξωτερικά του άλλου.  
 ii) Αν ένα σημείο  $M$  βρίσκεται στον κύκλο  $(c_1)$  και ένα σημείο  $N$  βρίσκεται στον κύκλο  $(c_2)$ , να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της απόστασης  $(MN)$ .

20. Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : y = x - 3$  και ο κύκλος

$$c : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8.$$

Να βρείτε:

- i) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο  $K$  του κύκλου  $(c)$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon)$   
 ii) το σημείο  $A$  του κύκλου  $(c)$  το οποίο απέχει από την ευθεία  $(\varepsilon)$  τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

21. Δίνεται σημείο  $M(x_0, y_0)$  με  $y_0 \neq x_0$  και έστω  $N$  το συμμετρικό του σημείου ως προς την ευθεία  $\varepsilon : y = x$ .

- i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου  $OMN$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων, είναι  $E = \frac{1}{2} |x_0^2 - y_0^2|$ .

ii) Αν το σημείο  $M$  ανήκει στον κύκλο  $c : (x-2)^2 + y^2 = 1$  να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) E = x_0^2 - 2x_0 + \frac{3}{2} \qquad \beta) \text{ υπάρχει } x_0 \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο, ώστε } E = 1.$$

22. Να αποδείξετε ότι κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι εξίσωση κύκλου. Ποιο είναι το κέντρο και ποια είναι η ακτίνα του κάθε κύκλου;

i)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 9 = 0$

ii)  $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

iii)  $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$

iv)  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y - 5 = 0.$

23. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου  $(c)$ .  
 ii) Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του κύκλου  $(c)$ ;  
 iii) Να βρείτε το σημείο τομής  $A$  του κύκλου  $(c)$  με τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ .  
 iv) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου του  $A$  στον κύκλο  $(c)$ .

24. Δίνεται το σημείο  $A(7, 7)$  το οποίο ανήκει στον κύκλο  $(c)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4ax - 3ay = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι  $a = 2$ .
- ii) Να βρείτε το αντιδιαμετρικό του σημείου  $A$ .
25. Ένας κύκλος  $(c)$  διέρχεται από τα σημεία  
 $A(-2, 0)$ ,  $B(1, -1)$  και  $\Gamma(6, 4)$ .
- Να βρείτε:
- i) την εξίσωση του κύκλου  $(c)$
- ii) το αντιδιαμετρικό  $A'$  του σημείου  $A$
- iii) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $(c)$  στο σημείο του  $A'$ .
26. Δίνεται ο κύκλος  $(c)$  ο οποίος διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 0)$  και  $B(5, 0)$  και έχει το κέντρο του στην ευθεία  
 $\varepsilon : y = x - 2$ .
- i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $(c)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = 3$  εφάπτεται στον κύκλο  $(c)$ . Ποιο είναι το σημείο επαφής;
27. Δίνεται ο κύκλος  $(c)$  ο οποίος έχει το κέντρο του στον άξονα  $x'x$  και εφάπτεται στην ευθεία  
 $\varepsilon : 2x + y - 1 = 0$
- στο σημείο  $A(0, 1)$ .
- i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $(c)$ .
- ii) Να υπολογίσετε την τιμή του θετικού αριθμού  $\mu$  έτσι, ώστε το σημείο  $B(\mu - 3, \mu)$  να είναι σημείο του κύκλου  $(c)$ .
28. Ένας κύκλος  $(c)$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 4)$  και  $B(2, 3)$  και έχει το κέντρο του στην ευθεία  
 $\varepsilon : y = 3x$ .
- i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $(c)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $(c)$  εφάπτεται στον άξονα  $y'y$ .
- iii) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι, ώστε η ευθεία  $\eta : y = \lambda x$  να εφάπτεται στον κύκλο  $(c)$ .



29. Δίνεται το σημείο  $M(5, 0)$  και ο κύκλος  $(c)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0.$$

- i) Να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $(c)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $(c)$ .
- iii) Από το σημείο  $M$  φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες στον κύκλο  $(c)$  και έστω  $A, B$  τα σημεία επαφής. Να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων  $MA$  και  $MB$ .
- iv) Να αποδείξετε ότι το  $KAMB$  είναι τετράγωνο.

30. Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 0)$  και  $B(2, 0)$ .

- i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(MA)^2 + (MB)^2 = 16.$$

- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία  $(\eta)$  με εξίσωση

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0.$$

- iii) Ποιο από τα σημεία  $M$  του ερωτήματος i) βρίσκεται πιο κοντά στην ευθεία  $(\eta)$ ;

31. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 1), B(-3, -1) \text{ και } \Gamma(2, 0).$$

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{M\Gamma}^2 = 22.$$

32. Δίνονται τα σημεία

$$P(-2, 4) \text{ και } Q(1, -2).$$

- i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$ , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία  $P$  και  $Q$  ισούται με 2, είναι κύκλος ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$  του παραπάνω κύκλου στο σημείο  $O(0, 0)$ .

33. Δίνεται το σημείο  $P(1,0)$  και η ευθεία

$$\varepsilon : x - 2 = 0.$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$(PM)^2 = 2d(M, \varepsilon).$$

34. Δίνεται ο κύκλος  $(c_1)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1$$

και δύο αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ .

- i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$$

είναι κύκλος  $(c_2)$  ομόκεντρος με τον κύκλο  $(c_1)$ .

- ii) Να παραστήσετε γραφικά το σύνολο των σημείων  $N(x, y)$  για τα οποία ισχύει

$$1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2.$$

35. Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : x + y - 4 = 0$  και ένα σημείο  $M(x_0, y_0)$  τέτοιο, ώστε

$$x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 4y_0 \neq 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η προβολή  $A$  του σημείου  $M$  πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$  έχει συντεταγμένες

$$\left( \frac{x_0 - y_0 + 4}{2}, \frac{y_0 - x_0 + 4}{2} \right).$$

- ii) Αν  $B$  και  $\Gamma$  είναι οι προβολές του σημείου  $M$  στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  δεν είναι συνευθειακά.
- iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = 2$ .
- iv) Να βρείτε ποιο από τα σημεία του γεωμετρικού τόπου που βρήκατε στο ερώτημα iii) απέχει ελάχιστη και ποιο απέχει μέγιστη απόσταση από το σημείο  $\Delta(7, 2)$ .

36. Δίνονται ο κύκλος  $(c_1)$  με κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho_1 = \sqrt{5}$  και ο κύκλος  $(c_2)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0.$$

- i) Να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho_2$  του κύκλου  $(c_2)$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $(c_1)$  και  $(c_2)$  εφάπτονται εξωτερικά.
- iii) Αν  $A$  είναι το σημείο επαφής των κύκλων  $(c_1)$  και  $(c_2)$ , τότε:
- α) να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{OA}$ .
- β) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$ .

37. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $(c)$ .
- ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $(c)$ .
- iii) Να βρείτε τις τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σημείο  $A(\mu, 1 - \mu)$  ανήκει στον κύκλο  $(c)$ .
- iv) Για  $\mu = -2$ , να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου  $(c)$  στο σημείο  $A$ .

38. Δίνεται ο κύκλος  $(c)$  με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0.$$

Να βρείτε:

- i) το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $(c)$
- ii) την εξίσωση της ευθείας  $OK$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων
- iii) τα σημεία  $A$  και  $B$  του κύκλου  $(c)$  τα οποία απέχουν από την αρχή των αξόνων ελάχιστη και μέγιστη απόσταση αντίστοιχα.

39. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \lambda - 2 = 0$$

όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).

ii) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου (c).

iii) Αν η ευθεία  $\varepsilon : y = 1$  εφάπτεται στον κύκλο (c), τότε:

α) να αποδείξετε ότι

$$\lambda^2 = 4\lambda + 4\mu - 4$$

β) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) έτσι, ώστε το κέντρο του να βρίσκεται στον άξονα  $x'x$ .

40. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $(c_\lambda)$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

ii) τα κέντρα των κύκλων  $(c_\lambda)$  είναι συνευθειακά σημεία

iii) όλοι οι κύκλοι  $(c_\lambda)$  διέρχονται από το ίδιο σημείο A

iv) όλοι οι κύκλοι  $(c_\lambda)$  εφάπτονται στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ .

41. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + \lambda x + y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία ο παραπάνω κύκλος:

α) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ .

42. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + 6\lambda y + (9\lambda^2 - 1) = 0 \quad (1)$$

όπου  $\lambda$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία.
- iii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1) και εφάπτεται στην ευθεία

$$\varepsilon : 4x + 3y - 15 = 0.$$

43. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + (4 - 2\lambda)y = 0 \quad (1)$$

όπου  $\lambda$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παραπάνω κύκλων.
- iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των παραπάνω κύκλων.

44. Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

και

$$x^2 + y^2 - 8\lambda x + 12\lambda^2 = 0 \quad (2)$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

- i) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .
- ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των παραπάνω κύκλων.
- iii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) και οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (2) εφάπτονται εξωτερικά για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .
- iv) Να βρείτε το σημείο επαφής  $M$  των παραπάνω κύκλων και την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο σημείο αυτό για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

45. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 6\lambda x - 4y + 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ενώ για  $\lambda = 0$  παριστάνει ένα μόνο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- ii) Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , να αποδείξετε ότι:
- α) τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε σταθερή ευθεία.
  - β) όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.
  - γ) όλοι οι κύκλοι εφάπτονται στον άξονα  $y'y$ .

46. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2(\sin\theta + 1)x - 2(\eta\mu\theta)y + (2\sin\theta + 1) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

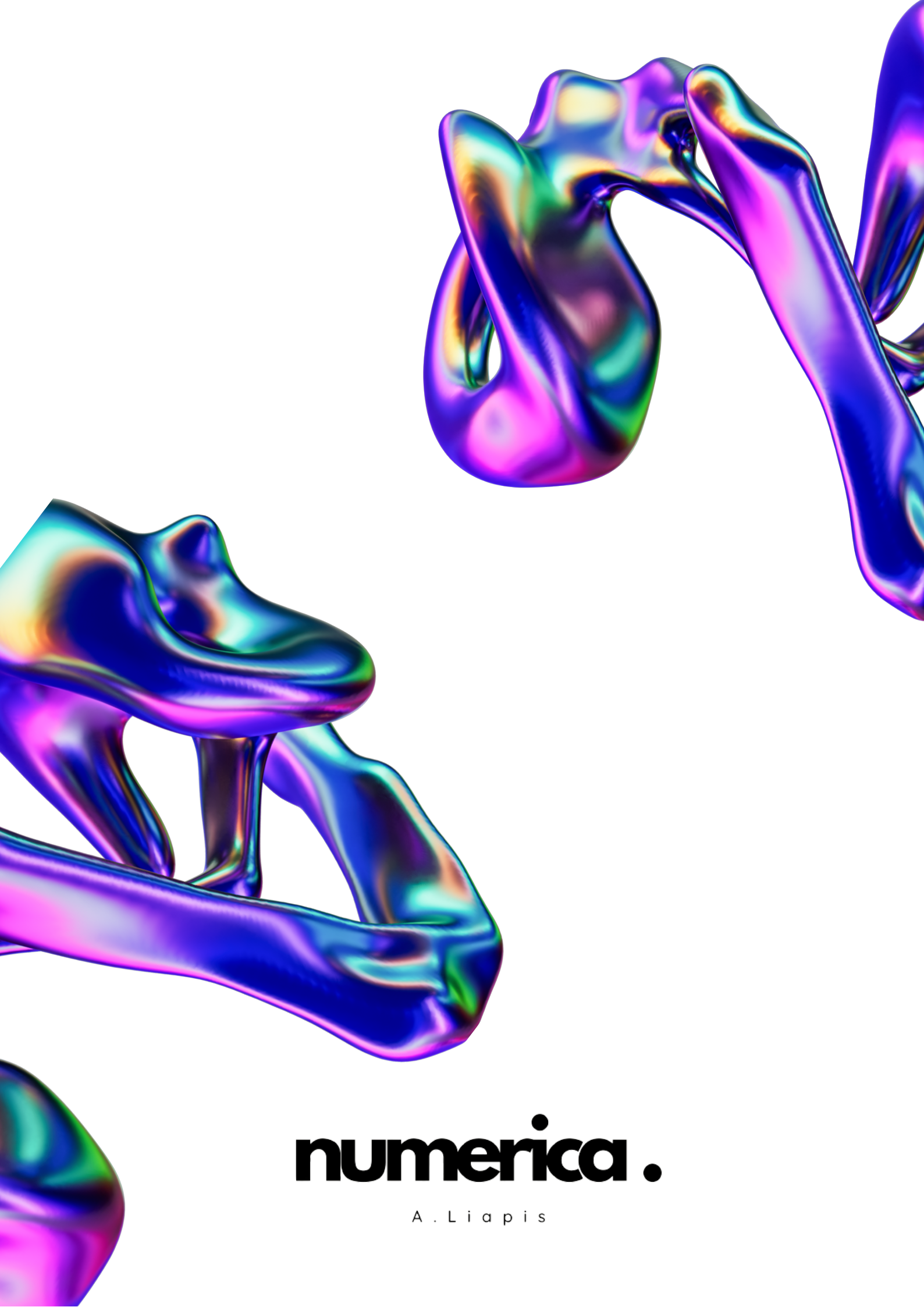
- i) η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $(c_\theta)$  για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$
- ii) τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν επίσης σε κύκλο
- iii) όλοι οι κύκλοι  $(c_\theta)$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.
47. Δίνονται τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  διαφορετικά μεταξύ τους και οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  τέτοιοι, ώστε

$$x_1^2 + y_1^2 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma \quad \text{και} \quad x_2^2 + y_2^2 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)  $\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma > 0$
- ii)  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma.$





**numerica.**

A . L i a p i s