



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.2

Η Παραβολή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

48. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστία το σημείο $E(-3, 0)$.

ii) Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία (δ) με εξίσωση $x = -1$.

iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$.

49. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

i) $y^2 = 16x$

ii) $y^2 = -6x$

iii) $x^2 = 20y$

iv) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

50. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x = 2p.$$

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία A και B .

ii) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου p έτσι, ώστε το εμβαδό του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων, να είναι ίσο με 4 τ.μ.

51. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 20x$$

και τα σημεία της $A(5, 10)$ και $B\left(\frac{1}{5}, -2\right)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής A' και B' των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα $y'y$.

iii) Αν M είναι το μέσο του τμήματος $A'B'$ και E είναι η εστία της παραβολής (c) , να αποδείξετε ότι $ME \perp AB$.

52. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$.

- i) Να βρείτε:
- α) την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c)
 - β) την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής (c) στο σημείο A
 - γ) το σημείο τομής M των ευθειών (δ) και (ϵ)
 - δ) την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ).
- ii) Να αποδείξετε ότι:
- α) η ευθεία (η) εφάπτεται στην παραβολή (c) σε κάποιο σημείο B
 - β) η ευθεία AB διέρχεται από την εστία E της παραβολής (c).

53. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 8x$$

το σημείο της $A(x_1, y_1)$ με $y_1 \neq 0$ και το σημείο $B(-x_1, 0)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $x_1 > 0$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται στην παραβολή (c).
- iii) Να βρείτε το x_1 έτσι, ώστε η απόσταση του σημείου $O(0, 0)$ από την ευθεία AB να είναι ίση με $\sqrt{2}$.

54. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$ και εφάπτονται στην ευθεία (ϵ) με εξίσωση

$$x = 1.$$

55. Δίνεται η οικογένεια των ευθειών (ϵ_α) με εξίσωση

$$x + \alpha y + \alpha^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται το πολύ δύο από τις ευθείες (ϵ_α).
- ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x_0, y_0)$ από τα οποία διέρχεται ακριβώς μία από τις ευθείες (ϵ_α).

56. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = x$$

και το σημείο της $M(a^2, a)$ με $a \in \mathbb{R}^*$. Αν A είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $y'y$, τότε:

- i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_a) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία OM, όπου O η αρχή των αξόνων
- ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ_a) διέρχεται από το ίδιο σημείο για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$.

57. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 6x$$

και δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$y_2^2 - y_1^2 = 6(x_2 - x_1).$$

ii) Αν η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $y_1 + y_2 = 2$

β) το μέσο M του τμήματος AB ανήκει σε μία σταθερή ευθεία η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

58. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y = x^2$$

και το σημείο της A με τετμημένη

$$x = \frac{1}{2}.$$

- i) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο A.
- iii) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών (ϵ) και (δ), να αποδείξετε ότι

$$(EA) = (EB).$$

59. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 4y$$

και το σημείο της A(2, 1).

- i) Να βρείτε:
- την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c) στο σημείο A
 - την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε)
 - το σημείο τομής B της ευθείας (η) με τον άξονα $y'y$.
- ii) Η ευθεία που διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία Z και H. Να αποδείξετε ότι
- $$(ZH) = 2(AB).$$

60. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y = \frac{1}{12}x^2.$$

- i) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c).
- ii) Αν H είναι το σημείο τομής της (δ) με την ευθεία $x = 6$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του τμήματος EH.
- iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στην παραβολή (c). Ποιο είναι το σημείο επαφής;
61. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 16y$$

και δύο σημεία της A(-2, α) και B(4, β).

- i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c).
- iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ της ευθείας (ε) με την παραβολή (c).
- iv) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (η) της παραβολής (c) στο σημείο Γ είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

62. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και το σημείο της $A(-5, 10)$.

- i) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου p .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c) στο σημείο A.
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).
- iv) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε) και (η) τέμνουν τον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c) σε δύο σημεία B και Γ αντίστοιχα τέτοια, ώστε η εστία E της παραβολής (c) να είναι το μέσο του BΓ.

63. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$4x + 3y - 4 = 0$$

η οποία διέρχεται από την εστία E της παραβολής. Να αποδείξετε ότι:

- i) $p = 2$
 - ii) η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία A και B
 - iii) οι εφαπτόμενες της παραβολής (c) στα σημεία A και B τέμνονται κάθετα και πάνω στη διευθετούσα της.
64. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από την εστία της παραβολής (c) και είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της.
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c), σε δύο σημεία A και B.
- iii) Αν ισχύει η σχέση $(AB) = 14$ να βρείτε την παράμετρο p της παραβολής.

65. Δίνεται η παραβολή (c) με εστία το σημείο $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{1}{2}$. Επίσης, δίνονται δύο σημεία

$$A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ με } y_1 < 0 < y_2$$

τα οποία ανήκουν στην παραβολή (c).

i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (c).

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad x_1 = \frac{y_1^2}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2}$$

$$\beta) \quad \det(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \cdot (1 + y_1 y_2).$$

iii) Αν η ευθεία AB διέρχεται από την εστία E, να αποδείξετε ότι

$$y_1 y_2 = -1 \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4}.$$

66. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 4x$$

και τα σημεία

$$A(\kappa^2, 2\kappa) \text{ και } B\left(\frac{1}{\kappa^2}, \frac{2}{\kappa}\right) \text{ με } \kappa \neq -1, 0, 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία τα οποία ανήκουν στην παραβολή (c).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

iii) Να βρείτε το σημείο τομής Γ των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

iv) Αν E είναι η εστία της παραβολής (c), να αποδείξετε ότι η ευθεία GE είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας της παραβολής (c).

67. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 4x$$

η οποία έχει εστία το σημείο E, διευθετούσα την ευθεία (δ) και διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -4)$.

- i) Να βρείτε την τιμή του α .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας EA.
- iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου B στο οποίο η ευθεία EA τέμνει την παραβολή (c).
- iv) Αν A' και B' είναι οι προβολές των σημείων A και B αντίστοιχα πάνω στην διευθετούσα (δ), να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $A'B'$ διέρχεται από την εστία E.

68. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 = 2py$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \lambda x + \kappa$$

η οποία τέμνει την παραβολή (c) στα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(x_3, 0)$ με $x_1 + x_2 \neq 0$ και $x_3 \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) $\lambda \neq 0$
- ii) $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = -\frac{\kappa}{\lambda}$
- iii) $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

69. Δίνονται οι παραβολές (c_1) και (c_2) με εξισώσεις

$$x^2 = 8y \quad \text{και} \quad x^2 = 4y$$

αντίστοιχα και το σημείο $A(4, \alpha)$ της παραβολής (c_1) .

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA, όπου O η αρχή των αξόνων.
- iii) Να αποδείξετε ότι η παραβολή (c_2) διέρχεται από το μέσο M του OA.
- iv) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των παραβολών (c_1) και (c_2) στα σημεία τους A και M αντίστοιχα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

70. Η εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής

$$c: y^2 = 2px$$

σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-1, 0)$.

- i) Να βρείτε την παράμετρο p και τις συντεταγμένες του σημείου M .
- ii) Αν η ευθεία (η) που διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην (ϵ) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B , να αποδείξετε ότι:
 - α) η εστία E της παραβολής (c) είναι το μέσο του AB
 - β) ο κύκλος με διάμετρο EM εφάπτεται στον άξονα $y'y$.

71. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2px$$

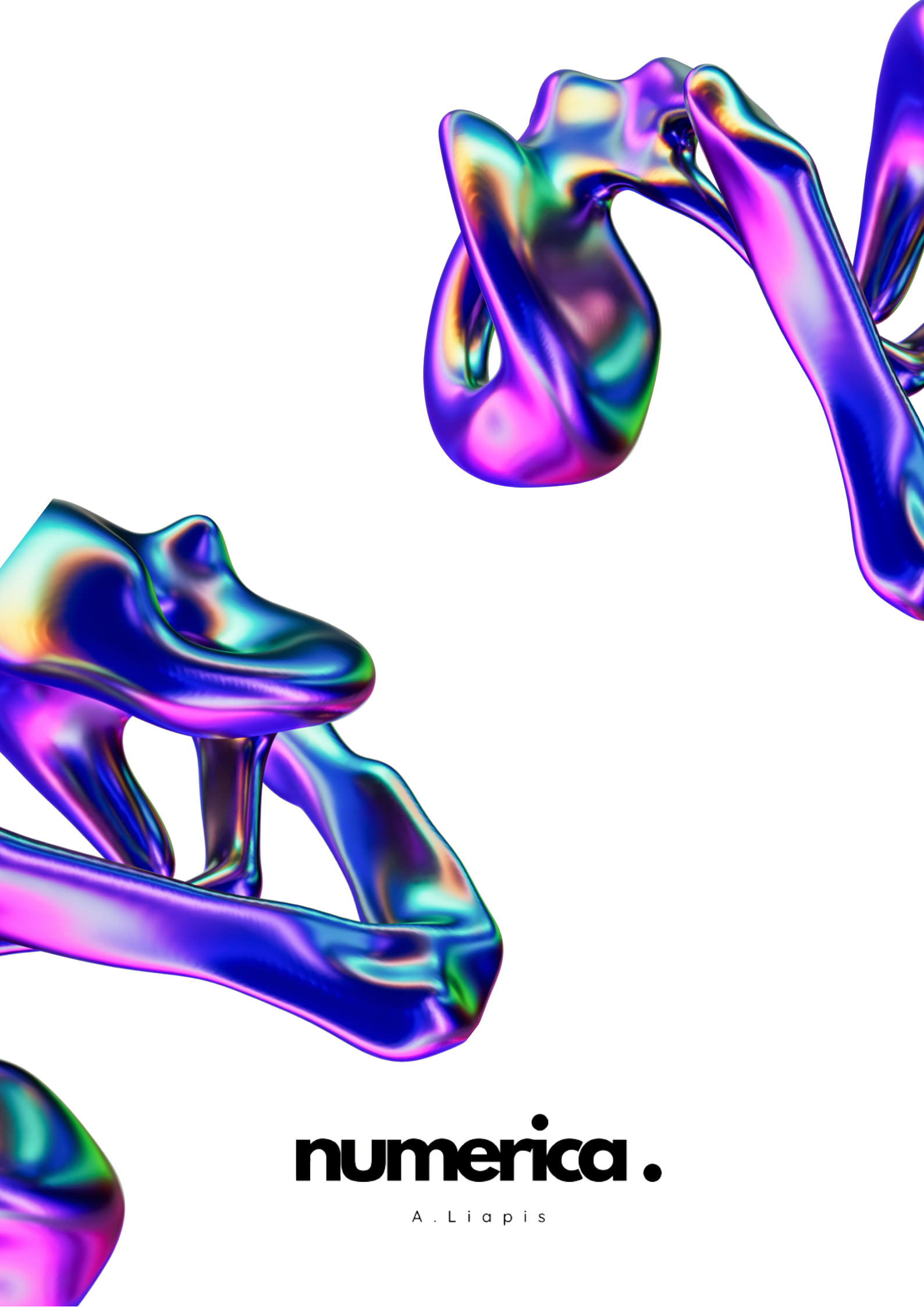
και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$, διαφορετικό από την κορυφή της.

Να αποδείξετε ότι:

- i) $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$
- ii) η εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής (c) στο σημείο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_1}$
- iii) η ευθεία OM τέμνει τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c) στο σημείο

$$A\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1}\right)$$

- iv) αν E είναι η εστία της παραβολής (c), τότε $EA \parallel (\epsilon)$.



numerica.

A . L i a p i s