



# Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3

Η Έλλειψη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**numerica.**

A . L i a p i s



**Προτεινόμενες Ασκήσεις**

72. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία  $E'(-2, 0)$  και  $E(2, 0)$  και μεγάλο άξονα 6.

ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία  $E'(0, -4)$  και  $E(0, 4)$  και εκκεντρότητα  $\frac{4}{5}$ .

iii) Όταν έχει κορυφές τα σημεία  $A'(0, -5)$  και  $A(0, 5)$  και μικρό άξονα 4.

iv) Όταν έχει εστία το σημείο  $E'(0, -2)$  και κορυφές τα σημεία

$$A'(0, -7) \text{ και } A(0, 7).$$

73. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

i)  $9x^2 + y^2 = 9$

ii)  $9x^2 + 4y^2 = 144$ .

74. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει τις εστίες της στον άξονα  $x'x$ , κορυφές τα

σημεία  $A'(-2\sqrt{5}, 0)$  και  $A(2\sqrt{5}, 0)$  και εκκεντρότητα

$$e = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).

ii) Να βρείτε τις εστίες  $E', E$  και τις κορυφές  $B', B$  της έλλειψης (c).

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $E'B'EB$ .

75. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{με} \quad \alpha > \beta > 0$$

η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma, 0) \quad \text{και} \quad E(\gamma, 0), \quad \text{με} \quad \gamma > 0.$$

Αν η ευθεία  $x = \gamma$  τέμνει την έλλειψη (c) στα σημεία Γ και Δ, να αποδείξετε ότι:

i)  $(\Gamma\Delta) = 2\frac{\beta^2}{\alpha}$

ii)  $(\Gamma E) = \alpha - \frac{\gamma^2}{\alpha}$

iii)  $(\Gamma E') = \alpha + \frac{\gamma^2}{\alpha}$ .

76. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 52$$

και δύο σημεία της  $\Gamma(x_1, y_1)$  και  $\Delta(x_2, y_2)$ .

i) Να αποδείξετε ότι

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

ii) Αν το σημείο  $M\left(5, \frac{5}{2}\right)$  είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ, τότε:

α) να αποδείξετε ότι

$$x_1 - x_2 + 2(y_1 - y_2) = 0$$

β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΓΔ.

77. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

και η ευθεία (δ) με εξίσωση  $x = 4$ .

- i) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$  της έλλειψης (c).
- ii) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα  $\varepsilon$  της έλλειψης (c).
- iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο  $M$  της έλλειψης (c) ισχύει η σχέση

$$\frac{(ME)}{d(M, \delta)} = \varepsilon.$$

78. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = 2x + 1$ .

- i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη (c) σε δύο σημεία  $K(x_1, y_1)$  και  $\Lambda(x_2, y_2)$  με  $x_1 < x_2$ .
- ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $x_1 + x_2$ .
- iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του τμήματος  $K\Lambda$ .

79. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

και ένα σημείο της  $M(x_1, y_1)$ .

- i) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$  της έλλειψης (c).
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$(ME')^2 + (ME)^2 = 2(x_1^2 + y_1^2) + 18.$$

- iii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$(ME') + (ME).$$

- iv) Να αποδείξετε ότι

$$(ME') \cdot (ME) + (MO)^2 = 41$$

όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

80. Έστω η έλλειψη (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία

$$A'(-\alpha, 0), \quad A(\alpha, 0), \quad B'(0, -\beta) \quad \text{και} \quad B(0, \beta) \quad \text{με} \quad \alpha > \beta > 0$$

και εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma, 0) \quad \text{και} \quad E(\gamma, 0).$$

Έστω επίσης, ένα σημείο  $M(x_1, y_1)$  αυτής της έλλειψης τέτοιο, ώστε

$$\sqrt{(x_1 + \gamma)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 - \gamma)^2 + y_1^2} = 8.$$

i) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 4$ .

ii) Αν ισχύει η σχέση  $\widehat{B'EB} = \frac{\pi}{3}$ , να βρείτε:

α) την εκκεντρότητα  $\varepsilon$  της έλλειψης (c)

β) την εξίσωση της έλλειψης (c).

81. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

και τα σημεία της

$$K(2, -1) \quad \text{και} \quad \Lambda(x_1, y_1) \quad \text{με} \quad x_1 \neq 2 \quad \text{και} \quad y_1 \neq -1.$$

i) Να βρείτε την εκκεντρότητα  $\varepsilon$  της έλλειψης (c).

ii) Να αποδείξετε ότι

$$y_1^2 = 2 - \frac{x_1^2}{4}.$$

iii) Αν M είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ και  $\lambda_1, \lambda_2$  οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών OM και ΚΛ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \varepsilon^2 - 1.$$

82. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha > \beta > 0.$$

Από την εστία  $E(\gamma, 0)$  της έλλειψης (c) φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα  $x'x$  η οποία τέμνει την έλλειψη στο σημείο M με αρνητική τεταγμένη.

i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι

$$\left(\gamma, -\beta\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$$

όπου  $\varepsilon$  η εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

ii) Αν η ευθεία OM είναι παράλληλη προς την ευθεία AB, όπου  $A(\alpha, 0)$  και  $B(0, \beta)$ , να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

83. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία

$$A'(-4, 0), \quad A(4, 0), \quad B'(0, -3) \quad \text{και} \quad B(0, 3).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) το σημείο  $M\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$  ανήκει στην έλλειψη (c)

ii) η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της έλλειψης στο σημείο M ορίζει με τους ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  ισοσκελές τρίγωνο.

84. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

i) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$  της έλλειψης (c).

ii) Οι ευθείες που διέρχονται από τις εστίες  $E'$  και  $E$  και είναι κάθετες στον άξονα  $x'x$  τέμνουν την έλλειψη (c) στα σημεία  $\Gamma'$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα με θετικές τεταγμένες.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της έλλειψης στο σημείο  $\Gamma$ .

β) Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει την ευθεία  $E'\Gamma'$  στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι

$$(E'Z) = (E\Gamma').$$

85. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- i) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$  της έλλειψης (c).
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της έλλειψης (c) στο σημείο της  $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ .
- iii) Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $\Gamma$ , να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία  $E'\Gamma$ .

86. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

και το σημείο της  $M(-2, 1)$ .

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της έλλειψης (c) στο σημείο  $M$ .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\eta$ ) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) στο σημείο  $M$ .
- iii) Αν  $K$  είναι η προβολή του σημείου  $M$  στον άξονα  $x'x$  και  $\Lambda$  είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία ( $\eta$ ) τέμνει τον άξονα  $y'y$ , να αποδείξετε ότι

$$\overline{O\Lambda} = 3\overline{MK}$$

όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

87. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-2, 0) \quad \text{και} \quad E(2, 0)$$

και μήκος μικρού άξονα ίσο με 4.

- i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).
- ii) Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) σε κάποιο σημείο της  $M(x_1, y_1)$  τέμνει την ευθεία  $x = 4$  στο σημείο  $K$ . Να αποδείξετε ότι

$$\widehat{MEK} = 90^\circ.$$



88. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = -x + 7$ .
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραγώνου που έχει δύο απέναντι πλευρές πάνω στις ευθείες που βρήκατε στο ερώτημα i).

89. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-\sqrt{5}, 0) \quad \text{και} \quad E(\sqrt{5}, 0)$$

και ένα σημείο της M για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(ME') + (ME) = 6.$$

Να βρείτε:

- i) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)
  - ii) την εξίσωση της έλλειψης (c)
  - iii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία  $y = -2x$ .
90. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

και το σημείο της  $M(2, 1)$ .

- i) Να βρείτε τις κορυφές  $A'$  και  $A$  της έλλειψης (c) που βρίσκονται στον άξονα  $x'x$ .
- ii) Να βρείτε τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  στα οποία οι ευθείες  $MA'$  και  $MA$  αντίστοιχα τέμνουν τον άξονα  $y'y$ .
- iii) Αν  $Z$  είναι το μέσο του  $\Gamma\Delta$ , να αποδείξετε ότι η ευθεία  $MZ$  εφάπτεται στην έλλειψη (c).

91. Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-4, 0) \text{ και } E(4, 0)$$

και μία κορυφή της είναι το σημείο  $B(0, \sqrt{2})$ .

Να βρείτε:

- i) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)
  - ii) την εξίσωση της έλλειψης (c)
  - iii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία  $y = 3x$ .
92. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

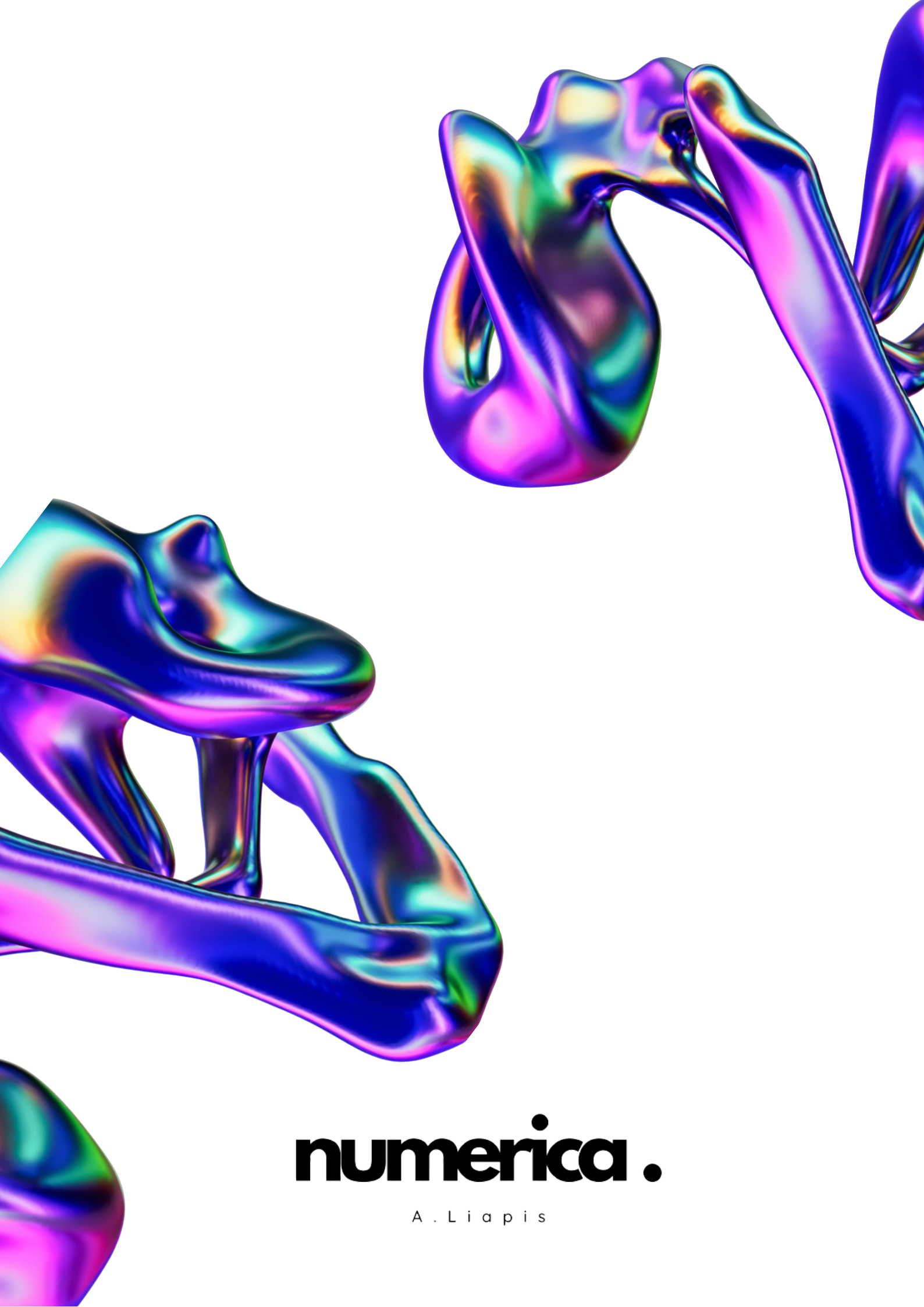
- i) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$  της έλλειψης (c).
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο  $E$  και είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα του (c).
- iii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη (c) στο α' τεταρτημόριο.
- iv) Αν η εφαπτομένη (η) της έλλειψης (c) στο σημείο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι  $E'K \perp (\eta)$ .

93. Μία έλλειψη (c) έχει τις εστίες της στον άξονα  $x'x$ , διέρχεται από το σημείο  $M(\sqrt{2}, 1)$  και δύο κορυφές της είναι τα σημεία

$$A'(-2, 0) \text{ και } A(2, 0).$$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε) και (η) της έλλειψης (c) στα σημεία της  $M$  και  $A$  αντίστοιχα.
- iii) Αν  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) και  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $MA'$  και  $\Gamma O$  είναι μεταξύ τους παράλληλες.





**numerica.**

A . L i a p i s