



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.4

Η Υπερβολή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

94. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-7, 0)$, $E(7, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$ και $A(5, 0)$.

ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-16, 0)$, $E(16, 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

iii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$, κορυφές τα σημεία $A'(-\sqrt{3}, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(3, 2)$.

95. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -\sqrt{10})$, $E(0, \sqrt{10})$ και ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y = -3x \quad \text{και} \quad y = 3x.$$

ii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$, εστιακή απόσταση $(E'E) = 10$ και ασύμπτωτες τις ευθείες

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{4}{3}x.$$

96. Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

i) $4x^2 - 25y^2 = 100$

ii) $y^2 - x^2 = 49$

iii) $x^2 - 9y^2 = 16$

iv) $9y^2 - 100x^2 = 900$.

97. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$, $E(5,0)$ και διέρχεται από το σημείο

$$M\left(-5, \frac{9}{4}\right).$$

- ii) Όταν έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$, ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις

$$y = 2x \text{ και } y = -2x$$

και εμβαδό ορθογωνίου βάσης 8 τ.μ.

98. Δίνεται ο κύκλος (c) με εξίσωση

$$x^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Να βρείτε:

- i) τα σημεία τομής του κύκλου (c) με τον άξονα $x'x$
- ii) την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει εστίες τα σημεία που βρήκατε στο ερώτημα i).
99. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Να βρείτε:

- i) τις εστίες και τις κορυφές της έλλειψης (c)
- ii) την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης (c) και κορυφές τις εστίες της έλλειψης (c).
100. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Να βρείτε:

- i) τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c)
- ii) την εξίσωση του κύκλου (c_1) ο οποίος έχει κέντρο τη δεξιά εστία της υπερβολής (c) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- iii) τα σημεία τομής των ασύμπτωτων της υπερβολής (c) με τον κύκλο (c_1).

101. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Να βρείτε:

- i) τις εστίες E' και E της έλλειψης (c)
- ii) την εξίσωση της υπερβολής (c_1) η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη (c) και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

102. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 12$.

- i) Να βρείτε τα σημεία P και Σ στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή (c).
- ii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $P\Sigma$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής (c).

103. Μια υπερβολή (c) έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

και εκκεντρότητα $\varepsilon = 3$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\beta^2 = 8\alpha^2$.
- ii) Αν η υπερβολή (c) διέρχεται από το σημείο $M(2, 4)$ να βρείτε:
 - a) τις τιμές των α και β
 - b) τις εστίες της υπερβολής.

104. Μία υπερβολή (c) έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \alpha, \beta > 0,$$

εστία το σημείο $E(13, 0)$ και ασύμπτωτη την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \frac{5}{12}x.$$

- i) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων της υπερβολής (c).
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο $E(13, 0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).
- iii) Αν Z είναι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) και O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι:
 - α) $(EZ) = \beta$
 - β) $(OZ) = \alpha$.

105. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 2.$$

- i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της υπερβολής (c).
- ii) Αν M είναι τυχαίο σημείο της υπερβολής (c) και O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι

$$(OM)^2 = (E'M) \cdot (EM).$$

106. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

η οποία έχει εστίες τα σημεία E', E και εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{5}$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) $\beta = 2\alpha$
- ii) αν M είναι σημείο της υπερβολής (c) τέτοιο, ώστε $(ME) = 4\alpha > (ME')$ τότε:
 - α) $(ME') = 2\alpha$
 - β) το τρίγωνο $E'ME$ είναι ορθογώνιο.

107. Δίνεται ο κύκλος (c_1) με εξίσωση

$$(x+5)^2 + y^2 = 16$$

και το σημείο $E(5, 0)$.

- i) Να βρείτε το κέντρο E' και την ακτίνα ρ_1 του κύκλου (c_1) .
- ii) Ένας κύκλος (c) διέρχεται από το σημείο E και εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου (c_1) . Αν M είναι το κέντρο του κύκλου (c) , να αποδείξετε ότι:
- α) $(ME') = 4 + (ME)$
- β) το σημείο M ανήκει στο δεξιό κλάδο της υπερβολής

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1.$$

108. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

- i) Να βρείτε τις εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και την εκκεντρότητα ε της υπερβολής (c) .
- ii) Αν το σημείο $M(x_1, y_1)$ με $x_1 > 0$ ανήκει στην υπερβολή (c) , να αποδείξετε ότι:
- α) $(ME')^2 - (ME)^2 = 12x_1$ β) $(ME') > (ME)$
- γ) $(ME') - (ME) = 4$ δ) $(ME') = \varepsilon x_1 + 2$ και $(ME) = \varepsilon x_1 - 2$.

109. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

η οποία διέρχεται από τα σημεία $P(3, 4)$ και $\Sigma(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Να βρείτε:

- i) τους α και β
- ii) την εκκεντρότητα της υπερβολής (c)
- iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο P .

110. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

η οποία έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \sqrt{2}$$

και διέρχεται από το σημείο $M(-5, 3)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha = \beta = 4.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο M.

111. Δίνονται οι υπερβολές (c₁) και (c₂) με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \quad \text{και} \quad y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$$

αντίστοιχα.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c₁) στο σημείο $M(2, 1)$.

ii) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει την υπερβολή (c₂).

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

112. Δίνεται το σημείο

$$M\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right) \text{ με } t \in \mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

για όλες τις τιμές του $t \in \mathbb{R}^*$.

ii) Για $t = 2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο M.

113. Έστω η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \alpha, \beta > 0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(4, 3\sqrt{3})$ και έχει ασύμπτωτη την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \frac{3}{2}x.$$

- i) Να βρείτε τους α και β .
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της υπερβολής (c) στο σημείο M.
- iii) Αν η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο P και η ευθεία $x = 4$ τέμνει την ασύμπτωτη (ε) στο σημείο Σ, τότε:
 - α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων P και Σ
 - β) να αποδείξετε ότι η ευθεία PΣ είναι κάθετη στην ασύμπτωτη (ε).

114. Μία ισοσκελής υπερβολή (c) με εστίες τα σημεία

$$E'(-\gamma, 0) \text{ και } E(\gamma, 0),$$

διέρχεται από το σημείο

$$M\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (c).
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο M.
- iii) Αν P, Σ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (η) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του PΣ.

115. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής (c) οι οποίες:

- i) είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

- ii) διέρχονται από το σημείο $P\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

116. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής (c) οι οποίες:

- i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$

- ii) διέρχονται από το σημείο $P(0, 1)$.

117. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στην υπερβολή (c) σε κάποιο σημείο

$$M(x_1, y_1) \text{ με } x_1 > 0 \text{ και } y_1 < 0$$

και σχηματίζει με τους ημιάξονες O_x και O_y ισοσκελές τρίγωνο.

- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραπάνω ισοσκελούς τριγώνου.

118. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

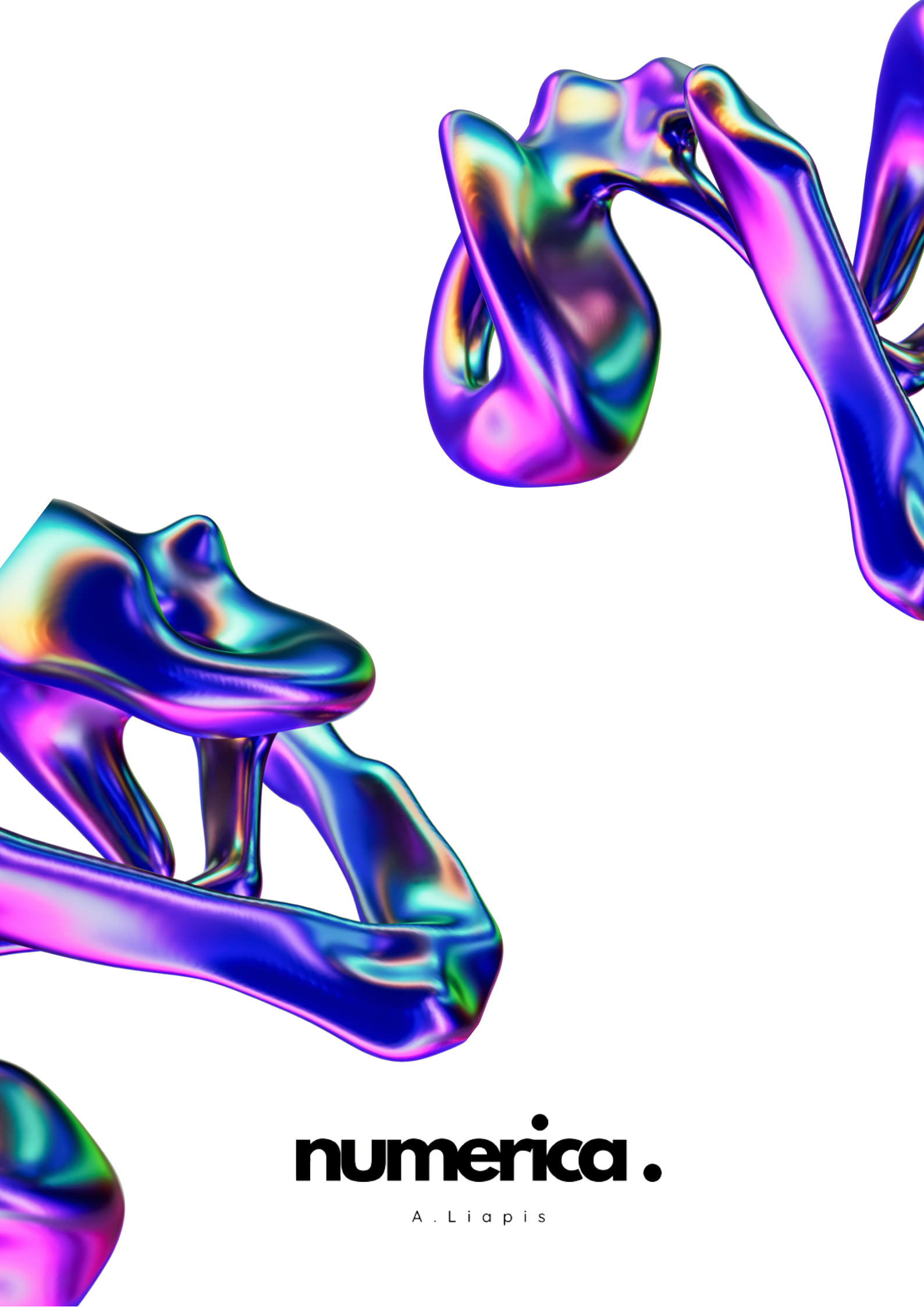
$$x^2 - y^2 = 8$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = -3x + 8.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η ευθεία (ε) έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την υπερβολή (c)
 ii) η ευθεία (ε) εφάπτεται στην υπερβολή (c).



numerica.

A . L i a p i s