



Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Κωνικές Τομές

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

numerica.

A . L i a p i s

Διαγώνισμα**Θέμα Α**

A1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου

$$c : x^2 + y^2 = \rho^2$$

στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2.$$

A2. Έστω μια ευθεία (δ) και ένα σημείο E εκτός της (δ) . Τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία (δ) ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0.$$

β) Η εφαπτομένη της παραβολής

$$y^2 = 2px$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = 2p(x + x_1).$$

γ) Όσο μεγαλύτερη είναι η εκκεντρότητα μιας έλλειψης τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη.

δ) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

είναι οι ευθείες

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x.$$

ε) Υπάρχουν μία έλλειψη και μία υπερβολή που έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

Θέμα Β

Δίνεται η παραβολή

$$c_1 : y^2 = 2x$$

και η έλλειψη

$$c_2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- B1.** Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής (c_1).
- B2.** Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης (c_2).
- B3.** Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κωνικών τομών είναι τα σημεία $P(1, \sqrt{2})$ και $\Sigma(1, -\sqrt{2})$.
- B4.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των δύο παραπάνω κωνικών τομών στο σημείο $P(1, \sqrt{2})$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Θέμα Γ

Δίνεται υπερβολή (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία $A'(-1, 0)$, $A(1, 0)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$.

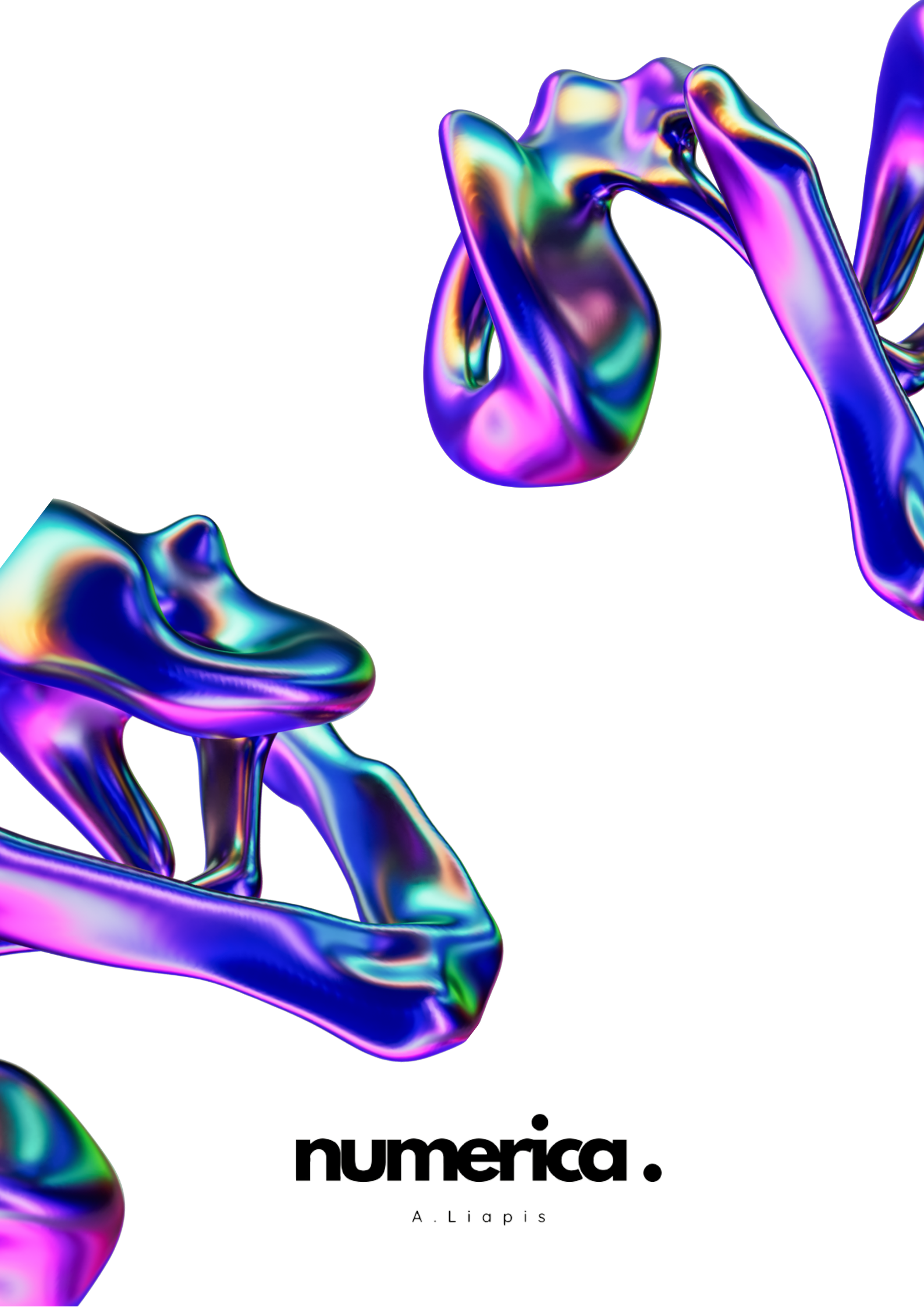
- G1.** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής (c).
- G2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).
- G3.** Μια ευθεία (η) διέρχεται από την κορυφή $A(1, 0)$ της υπερβολής (c) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq \pm\sqrt{3}$.
Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την υπερβολή (c), εκτός από το σημείο A .

Θέμα Δ

Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \lambda(3x - y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c).
- Δ2.** Ποιο είναι το κέντρο και ποια είναι η ακτίνα του κύκλου (c);
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία. Ποια είναι η εξίσωση αυτής της ευθείας;
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο.
- Δ5.** Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο. Ποια είναι η εξίσωση αυτής της εφαπτομένης;



numerica.

A . L i a p i s