Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

numerica.

A. Liapis

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{BZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}.$$

Αν οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ τέμνονται στο σημείο Κ, τότε:

i) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{EZ}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$$

ii) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$\overrightarrow{AK} = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\vec{\alpha} + \mu\overrightarrow{EZ}$$

iii) να βρείτε τις τιμές των λ και μ

iv) να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{EK} = 3\overrightarrow{EZ}.$$

2. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\sqrt{2}\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = 2\left|\vec{\alpha}\right| - \left|\vec{\beta}\right|$$

και

$$2\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2 = 2\left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right|$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$2\left|\vec{\alpha}\right|^2 - \left|\vec{\beta}\right|^2 = 4\left|\vec{\alpha}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right| - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

ii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right| = 1$, να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

3. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύει η σχέση

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \sqrt{2}\,|\vec{\alpha}|.$$

Αν η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

ii) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

iii) $|3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}| = 5|\vec{\alpha}|$.

4. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \nu, \qquad \text{όπου} \quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Αν το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι θετικός ακέραιος αριθμός, να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \nu$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}$

iii) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = \sqrt{\nu^2+2}$

iv) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = -\frac{1}{2\nu}$.

5. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$$

και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 2\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -3.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma} = \vec{0}$

ii) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

iii) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

iv) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$.

6. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

$$\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}=\vec{0} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{4}=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|2\vec{\beta}|$ **ii)** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

iii) $\vec{\beta}=4\vec{\alpha}$ **iv)** $\vec{\gamma}=-3\vec{\alpha}$

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+13=4|\vec{\alpha}|+6|\vec{\beta}| \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$

ii) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

iii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

iv) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Gamma}=9\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$$

όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}|=1,\ |\vec{\beta}|=2 \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{B\Gamma}|=4\sqrt{7}$$

i) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$

ii) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ.

iii) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

iv) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

9. Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε

- $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$
- $\left(\vec{\alpha}, \widehat{\vec{\beta}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$
- $(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) // \vec{\beta}$
- $\vec{\gamma} \perp \left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right)$.

i) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}.$$

iii) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

iv) Να βρείτε τη γωνία θ των διανσυμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

10. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Αν για κάποιο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει η σχέση $\left(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}\right) \perp \vec{\alpha}$, τότε:

α) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$$

γ) να βρείτε την τιμή του λ έτσι, ώστε $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = 4$.

11. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|, \quad \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \neq \vec{\beta}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \perp \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right).$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\vec{\gamma} // \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right).$$

iii) Αν ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3 \quad \text{και} \quad \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 9,$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \neq \vec{0}$

β) να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

12. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε

$$\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = 1$$

και η συνάρτηση

$$f(x) = \left|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}\right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\text{συν}\theta\cdot x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) \geq \left|\text{ημ}\theta\right|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) αν ο αριθμός 0 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f, τότε

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = -\vec{\beta}.$$

13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΒΓ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, $A(3,1)$ και τέτοιο, ώστε

$$\overrightarrow{AB} = (1,2).$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

ii) Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΟΑΒΓ.

iii) Να βρείτε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$.

iv) Αν B' είναι το συμμετρικό του σημείου Β ως προς τον άξονα $x'x$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OB'}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$.

14. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x+(2\lambda+1)y+1=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_λ) για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε ποια από τις ευθείες (ε_λ) είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y=3x$.

iv) Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία (ε_λ) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\zeta: x+2y+1=0$.

15. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+2xy+4x+4y+3=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ii) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

iii) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(0,2)$ και $B(-1,-3)$ το οποίο έχει κέντρο το σημείο $K(\alpha,0)$ του θετικού ημιάξονα Οx.

i) Να βρείτε συναρτήσει του α τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ.

ii) Αν το εμβαδό του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ είναι 24 τ.μ., να βρείτε:

α) την εξίσωση της ευθείας ΓΔ

β) το σημείο της ευθείας ΓΔ που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $E(1,9)$.

17. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με $A(0,2)$, $B(1,0)$ και τέτοιο, ώστε το κέντρο του Κ να βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=x$. Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου K

ii) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ

iii) το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ΓΔ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

18. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$y = x + 1 \quad \text{και} \quad y = 2x + 1.$$

i) Να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

ii) Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $K(2,4)$ και τέμνει τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2.$$

β) Αν η αρχή των αξόνων O, το σημείο K και το μέσο M του τμήματος AB είναι συνευθειακά σημεία, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

19. Δίνεται η εξίσωση

$$x + \lambda y - 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_λ) η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση $d(\lambda)$ της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε_λ).

iii) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή της απόστασης $d(\lambda)$ είναι ίση με $\sqrt{5}$.

iv) Να βρείτε την ευθεία (ε_λ) για την οποία η απόσταση $d(\lambda)$ γίνεται μέγιστη.

20. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2 - \alpha + 1)x + (2 - 5\alpha)y + (2\alpha^2 + 3\alpha) = 0$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_α).

ii) Να αποδείξετε ότι μόνο μία από τις ευθείες (ε_α) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε_0) και (ε_1).

iv) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η κορυφή Β έχει συντεταγμένες $(-2,-5)$, ενώ το ύψος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ έχουν εξισώσεις

$$x+3y-7=0 \quad \text{και} \quad y=5x-3$$

αντίστοιχα. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της πλευράς ΑΒ

ii) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ

iii) το μήκος του ύψους ΑΔ

iv) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

22. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2-\alpha)x+(\alpha^2+\alpha-2)y-(\alpha^2-3\alpha+2)=0$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_α).

ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_α) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iii) Να βρείτε την ευθεία (ε_α) που διέρχεται από το σημείο $K(1,1)$.

iv) Να βρείτε την ευθεία (ε_α) η οποία είναι κάθετη προς την ευθεία

$$\eta:\ x-3y+2=0.$$

23. Δίνονται τα σημεία

$$M(2,-1),\ A(\alpha,0) \quad \text{και} \quad B(0,\beta) \quad \text{με} \quad \alpha,\beta>0$$

τέτοια, ώστε $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=-4$ όπου Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να αποδείξετε ότι $2\alpha+\beta=4$.

ii) Να βρείτε τα α και β έτσι, ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ να γίνεται μέγιστο.

iii) Αν είναι $\alpha=1$ και $\beta=2$, να βρείτε το σημείο της ευθείας ΑΒ το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

24. Δίνονται τα σημεία

$$A(0,4),\quad B(3,7)\quad \text{και}\quad M(\kappa-1,\kappa+1)\ \text{ με }\ \kappa\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Μ αποτελούν κορυφές τριγώνου το οποίο έχει σταθερό εμβαδό.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ κινείται σε σταθερή ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε το συμμετρικό B' του σημείου Β ως προς την ευθεία (ε).

iv) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ έτσι, ώστε τα σημεία Α, Μ και B' να είναι συνευθειακά.

v) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $(AM)+(MB)$.

25. Δίνεται η εξίσωση

$$(\mu^2+1)x+(\mu+1)y-3\mu^2-4\mu-7=0,\quad \mu\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η δοθείσα εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_μ) για κάθε τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$

ii) δεν υπάρχει ευθεία (ε_μ) παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

iii) όλες οι ευθείες (ε_μ) διέρχονται από το ίδιο σημείο

iv) κάθε ευθεία (ε_μ) τέμνει τον κύκλο $c: x^2+y^2=36$ σε δύο σημεία.

26. Δίνεται το σημείο $A(3,4)$. Επίσης, δίνεται σημείο Μ τέτοιο, ώστε

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2+75=4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$$

όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Να βρείτε:

i) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ

ii) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του (OM)

iii) το σημείο του παραπάνω γεωμετρικού τόπου που βρίσκεται πλησιέστερα στον άξονα $x'x$.

27. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-2\lambda x-2(\lambda+1)y=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) για κάθε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων (c_λ) είναι συνευθειακά σημεία.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ο κύκλος (c_λ) είναι μοναδιαίος.

iv) Αν η ευθεία $\varepsilon: x+y-3=0$ τέμνει τον κύκλο (c_λ) σε δύο σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OE}=0$ όπου Ο η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

28. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2+4x+2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot y-4\sigma\upsilon\nu\theta=0,\quad \theta\in(0,2\pi).$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου (c_θ) για κάθε $\theta\in(0,2\pi)$.

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου (c_θ).

iii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το εμβαδό του κύκλου (c) γίνεται ελάχιστο.

iv) Για $\theta=\pi$, να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (c_θ) που άγονται από την αρχή των αξόνων

β) την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο (c_θ).

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το σημείο $A(1,3)$ και εμβαδό $E<4$.

Αν οι κορυφές Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(0,E)$ και $(E,0)$ αντίστοιχα, να βρείτε:

i) το εμβαδό Ε

ii) τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ

iii) την εξίσωση του κύκλου (c) που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ

iv) την ελάχιστη απόσταση σημείου Μ που διαγράφει τον κύκλο (c), από την ευθεία $\varepsilon: 6x+8y-41=0$.

30. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1:\ x^2+y^2=1 \quad \text{και} \quad c_2:(x-4)^2+y^2=25.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) εφάπτονται εσωτερικά.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των παραπάνω κύκλων.

iii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο (c_1) και εσωτερικά στον κύκλο (c_2) και έχει το κέντρο του πάνω στη διάκεντρο των κύκλων αυτών.

31. Δίνονται οι κύκλοι

$$c_1: x^2+y^2-8x-4y+4=0$$

και

$$c_2: x^2+y^2-12y+20=0.$$

i) Να βρείτε τα κέντρα Κ, Λ και τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 των κύκλων (c_1), (c_2) αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται σε δύο σημεία Δ και Ε.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΔΕ.

iv) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΚΕΛ είναι τετράγωνο.

32. Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2\lambda(x+2y-5), \quad \lambda\in\mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

ii) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων (c_λ) και να αποδείξετε ότι τα κέντρα ανήκουν σε σταθερή ευθεία.

iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι (c_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

iv) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι (c_λ) εφάπτονται της ευθείας

$$\varepsilon:\ x+2y-5=0.$$

33. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : 12 - 5y = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 3x + 4y = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι οι ευθείες

$$\delta_1 : 3x - 11y = 0 \quad \text{και} \quad \delta_2 : 11x + 3y = 0.$$

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα $\rho = 9$, εφάπτεται στις ευθείες (ε_1) και (ε_2) και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας (δ_1).

iii) Αν Α και Β είναι τα σημεία επαφής του παραπάνω κύκλου με τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα και Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι

$$(OA) = (OB) = 7.$$

34. Δίνεται η παραβολή $c : y^2 = 4x$ και το σημείο $A(-1, 0)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής (c) που άγονται από το σημείο Α.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Β και Γ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με την εφαπτομένη της παραβολής (c) στην κορυφή της.

iii) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ διέρχεται από την εστία της παραβολής (c) και εφάπτεται στη διευθετούσα της.

35. Δίνεται η παραβολή $c_1 : y^2 = 2\alpha x$ και ο κύκλος $c_2 : x^2 + y^2 = 3\alpha^2$ με $\alpha > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η παραβολή (c_1) και ο κύκλος (c_2) τέμνονται σε δυο ακριβώς σημεία από τα οποία το ένα είναι το $A\left(\alpha, \alpha\sqrt{2}\right)$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) του κύκλου (c_2) στο Α και το σημείο τομής της Γ με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) της παραβολής (c_1) στο Α και το σημείο τομής της Δ με τον άξονα $x'x$.

iv) Να βρείτε την τιμή του α ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΓΔ να είναι $8\sqrt{2}$.

36. Δίνεται η εξίσωση

$$2x^2+2y^2-\alpha^2x-4\alpha y+\alpha^2-2=0,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η δοθείσα εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_α) για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ποιο είναι το κέντρο και ποια η ακτίνα του (c_α);

ii) Τα κέντρα K των κύκλων (c_α) είναι σημεία μιας παραβολής (c).

Ποια είναι η εστία και ποια η διευθετούσα της (c);

iii) Όλοι οι κύκλοι (c_α) έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο που είναι η εστία της παραβολής (c).

iv) Όλοι οι κύκλοι (c_α) έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη. Ποια είναι η εξίσωσή της;

37. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+y^2-8(\text{συν}\theta)x+10(\text{ημ}\theta)y=0 \quad \text{όπου } \theta\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με ακτίνα $\rho\geq 4$.

ii) Να αποδείξετε ότι το κέντρο του παραπάνω κύκλου ανήκει στην έλλειψη

$$c:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$$

iii) Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

iv) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη (c) και σταθερή διαφορά 4.

38. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y=\frac{1}{8}x^2$$

το σημείο της $M\left(\alpha,\frac{1}{8}\alpha^2\right)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x-y-4=0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε) είναι

$$d(\alpha)=\frac{\alpha^2-8\alpha+32}{8\sqrt{2}} \quad \text{για κάθε} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$d(\alpha)\geq\sqrt{2} \quad \text{για κάθε} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M έτσι, ώστε η απόσταση $d(\alpha)$ να γίνεται ελάχιστη.

iv) Αν η απόσταση $d(\alpha)$ γίνει ελάχιστη, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής (c) στο σημείο M είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

39. Δίνεται η έλλειψη

$$c:\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \qquad \text{με} \qquad \alpha>\beta>0$$

η οποία έχει μήκος μεγάλου άξονα 8 και διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$.

i) Να βρείτε τους α και β.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης (c) στο σημείο της M.

iii) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με αντίστοιχες εξισώσεις

$$\frac{x}{8}-\frac{y}{4}=1 \qquad \text{και} \qquad \frac{x}{8}+\frac{y}{4}=-1$$

εφάπτονται στην έλλειψη (c).

40. Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{12}=1, \quad \alpha>0$$

η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2,3)$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

ii) Να βρείτε τις εστίες E' και E καθώς επίσης και την εκκεντρότητα ε της έλλειψης (c).

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης (c) σ' αυτό το σημείο.

iv) Αν η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{(\mathrm{E\Gamma})}{(\mathrm{EM})}=\varepsilon$ **β)** $(\mathrm{M\Gamma})^2=\dfrac{3}{4}(\mathrm{EM})\cdot(\mathrm{E'M})$.

41. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1$$

και ένα σημείο της $M(x_1,y_1)$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Κ και Λ της εφαπτομένης της υπερβολής (c) στο σημείο Μ με τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

iv) Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O\Lambda}}$ είναι σταθερό.

v) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ είναι σταθερό.

42. Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1$$

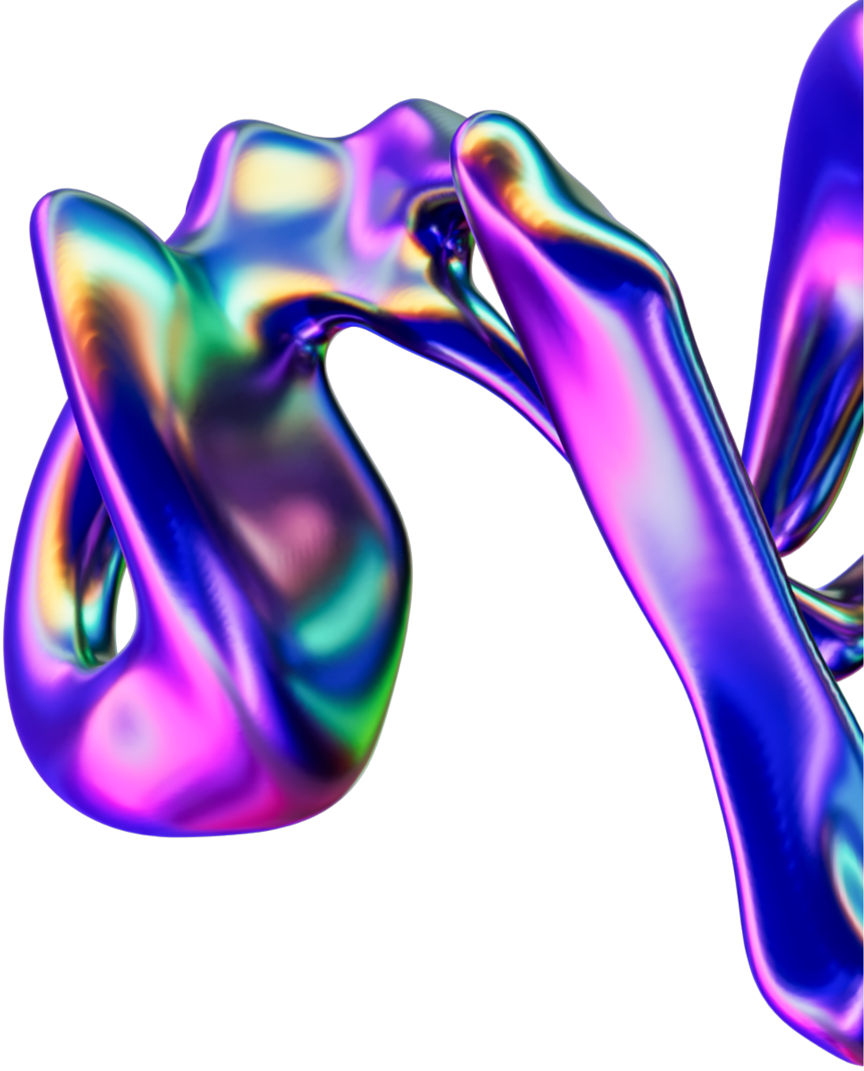
και το σημείο της $M(2,1)$.

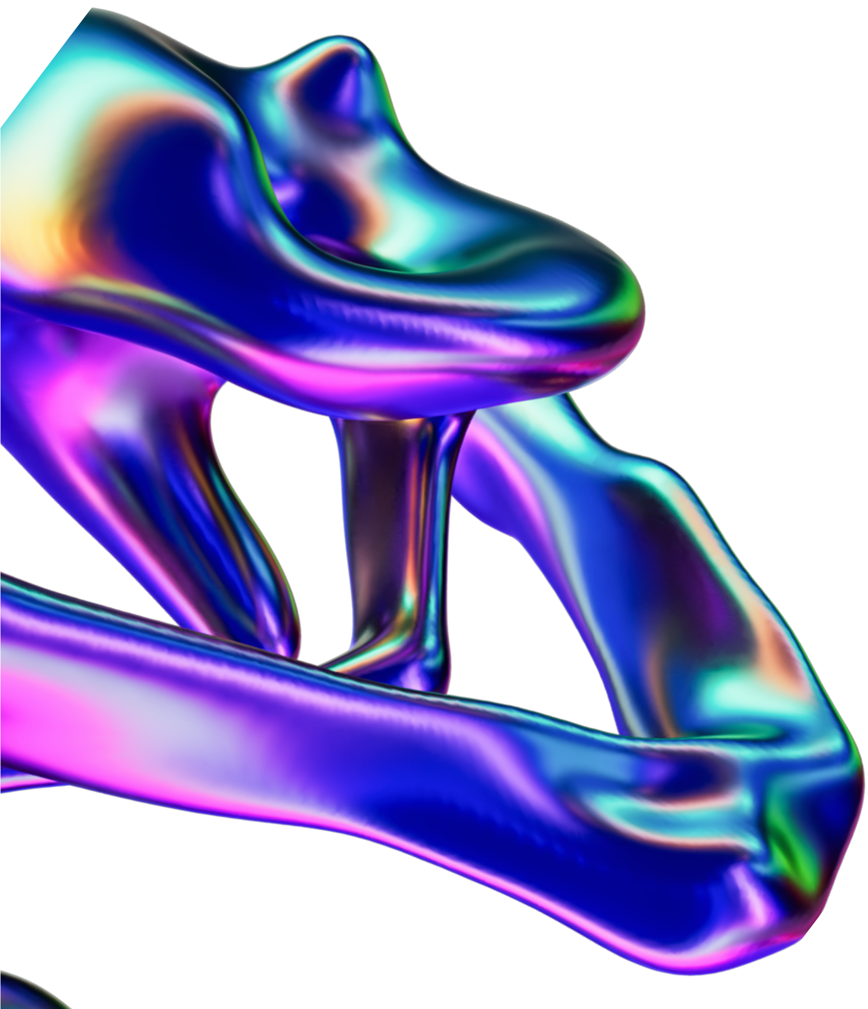
i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c) στο σημείο Μ.

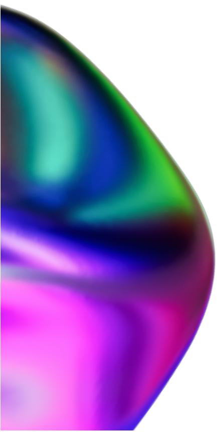
ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία διέρχεται από το σημείο Μ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

iii) Να βρείτε τα σημεία Ρ και Σ στα οποία οι ευθείες (ε) και (η) αντίστοιχα τέμνουν τον άξονα $y'y$.

iv) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΡΣ διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής (c).







numerica.

A. Liapis