

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.2.Α

Συναρτήσεις

- Η Έννοια της Πραγματικής Συνάρτησης
- Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x-1}{|x|-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

iii) $f(x) = \frac{1}{x^2 + |x| - 2}$

iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2\sqrt{x}-3}$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{4-x}$

ii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$

iii) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\ln(x-1)}$.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}-2}$

ii) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{3-x}+1-x}$

iii) $f(x) = \frac{4x}{e^x-2}$

iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{\ln x-1}$.

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

ii) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+2}$

iii) $f(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3x^2-3x+1}}$..

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln(16-x^2)$

ii) $f(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

iii) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

iv) $f(x) = \ln(\ln x)$.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

i) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+\lambda}$

ii) $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x - \lambda}$

iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}$

iv) $f(x) = \ln(x^2 + \lambda x + 4)$.

7. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f , όταν:

i) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$

ii) $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$

iii) $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

iv) $f(x) = e^x + \pi$.

8. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις f να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία τουλάχιστον λύση. Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

i) $f(x) = x^2 + 4x$

ii) $f(x) = 3 - |x|$

iii) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

iv) $f(x) = \frac{5x}{x+2}, x > 0$.

9. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x-3} + 5$

ii) $f(x) = e^x + 1$

iii) $f(x) = \ln x + 4$

iv) $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

i) Να βρείτε το σύνολο A .

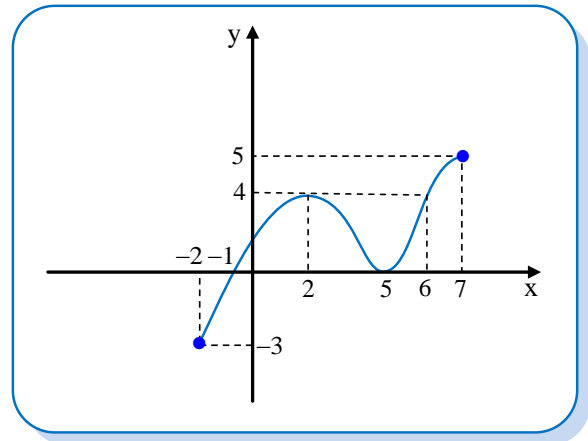
ii) Να βρείτε το σύνολο $f(A)$.

iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f(x) = 0$ β) $f(x) = 4$

iv) Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(x) > 0$ β) $f(x) \leq 4$.



11. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

i) Να βρείτε το σύνολο A .

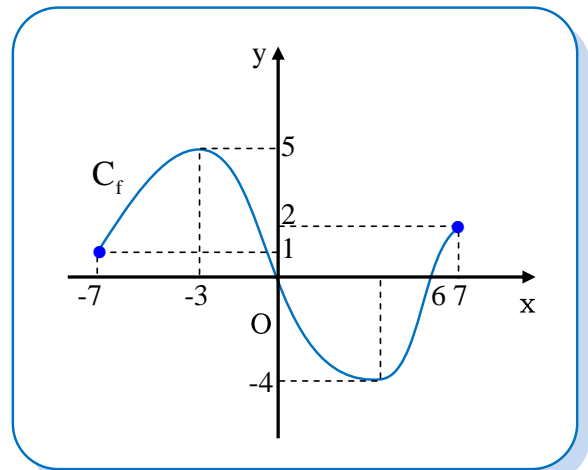
ii) Να βρείτε το σύνολο $f(A)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$(f(x))^2 = 5f(x)$$

iv) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$



12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x + \alpha}{x - 3}$$

διέρχεται από το σημείο $M(4,2)$. Να βρείτε:

- i) την τιμή του α
- ii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- iii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \frac{3}{2}$.

13. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = (x - \alpha)e^x + \beta$$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 και την ευθεία $x=1$ στο σημείο με τεταγμένη 2. Να βρείτε:

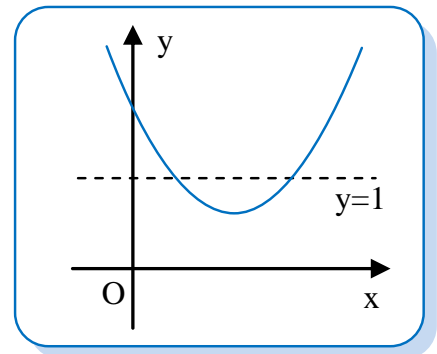
- i) τις τιμές των α και β
- ii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2x$.

14. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$4(\gamma - 1) < \beta^2 < 4\gamma.$$



15. Ένα κομμάτι σύρμα μήκους 40 cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(40 - x)$ cm. Στη συνέχεια λυγίζονται και τα δύο κομμάτια σε σχήμα τετραγώνου. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων ως συνάρτηση του x .
16. Δύο σημεία $A(x,0)$ και $B(0,y)$ κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έτσι ώστε να ορίζουν με το σημείο $K(2,1)$ τρίγωνο ορθογώνιο στο K . Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου KAB ως συνάρτηση του x .

17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f :

- i) με τον άξονα $x'x$ ii) με την ευθεία $y = 1$.

18. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x) = x^3 - 4x$ ii) $f(x) = e^{2x} - 1$

iii) $f(x) = \frac{|x| - 4}{\ln^2 x}$ iv) $f(x) = 1 - \ln x$.

19. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , όταν:

i) $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x - 2$

ii) $f(x) = 4$ και $g(x) = |x - 1|$

iii) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ και $g(x) = x^2 - 4x + 1$

iv) $f(x) = x^2 - e^x$ και $g(x) = x^2 e^x - 1$.

20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln^2 x - \ln x^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να βρείτε:

i) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii) τις τιμές του $x \in (0, +\infty)$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 3$.

21. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

ii) Αν η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = -x + \kappa$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\kappa > 1$.

22. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x) = |x - 1|$

ii) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

iv) $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

Από τη γραφική παράσταση της f να βρείτε το σύνολο τιμών της.

23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

iii) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

24. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x^2) + f(x) = x^4 - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο, τουλάχιστον, κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

25. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + f(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

26. Έστω συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f(x) + f(2 - x) = 2g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ii) Αν για την f ισχύει η σχέση

$$f(1 - x) = 2x - x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τους τύπους των f, g και το κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων.

27. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) + f(y) = (x + y) \cdot f(xy) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

28. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$3f(x) + f(-x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

29. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$f(x) + f(-x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



numerica.

A . L i a p i s