Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3.Α

Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση

- Μονοτονία Συνάρτησης
- Ακρότατα Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

50. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε το είδος μονοτονίας.

i) $f(x)=e^{2x}+1$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$

iii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2(2x)$ **iv)** $f(x)=\ln(\ln x)$.

51. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,13)$ και $B(7,11)$.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)-6)<f(7)+2$.

52. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(4,3)$ και $B(5,1)$.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2+f\left(x^2\right)\right)<1$.

53. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^x+x^3,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x+1}+(x+1)^3<1$.

54. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x},\ x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}<\sqrt{x^3}+\frac{1}{x}$.

55. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x+\ln x,\quad x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\ln x<x$.

56. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα με $f(0)=0$.

Να βρείτε:

i) το πρόσημο της συνάρτησης f

ii) το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x)=\ln\frac{f(x)}{x}.$$

57. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα με $f(2)=8$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=x^3-f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $8x^3<f(2x)$.

58. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(2^x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

59. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι περιττή και γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) $xf(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

60. Έστω συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0)=0$
- η f είναι γνησίως αύξουσα
- $g(x)=f(f(x))+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $g(f(x))<1$.

61. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{10x}{x^2+25},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=1+|x-5|,\ x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=5$

ii) η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

iii) οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

62. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) ο αριθμός 2 δεν είναι ολικό μέγιστο της συνάρτησης f.

63. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(x)=4-g^3(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(2)=1$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

64. Έστω συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=f^2(x)-2xf(x)+x^2+7 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)\ge 7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) αν η ευθεία με εξίσωση $y=x$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο, τότε η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

65. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln x \quad \text{και} \quad g(x)=|x|.$$

i) Να εξετάσετε αν ισχύει $fog=gof$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof έχει ολικό ελάχιστο και να την παραστήσετε γραφικά.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση gof ως προς τη μονοτονία.

iv) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(g\circ f)(x)=\alpha$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{e^{x+1}-1}{2^x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=e\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f\left(e^x-2\right)<0.$$

iv) Να αποδείξετε ότι

$$e^{x^2+1}-1\geq(e-1)2^{x^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

67. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και τέτοιες, ώστε

$$f(1)=2 \quad \text{και} \quad g(0)=1.$$

i) Να αποδείξετε ότι:

α) αν οι συναρτήσεις f, g έχουν ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα

β) αν οι συναρτήσεις f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$(f\circ f)\left(x^2\right)<f(2).$$

iii) Αν ισχύει η σχέση

$$\left((f\circ f)\circ g\right)\left(e^x\right)<f(2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

numerica.

A. Liapis