

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3.Β

Μονότονες συναρτήσεις -
Αντίστροφη συνάρτηση

- Συνάρτηση 1 - 1
- Αντίστροφη Συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica .

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

68. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1 και για καθεμιά από αυτές να βρείτε την αντίστροφή της.

i) $f(x) = 4x - 1$

ii) $f(x) = x(x - 1) + 2$

iii) $f(x) = e^{2x-1} + 3$

iv) $f(x) = \ln(x + 1)$

v) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

vi) $f(x) = x \sin x$.

69. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

70. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(1 + e^x).$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

71. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2\eta\mu x + 1 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{2x} + x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

iii) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(2)$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x - e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

ii) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(-1)$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$\lambda^2 - 2\lambda = e^{1-\lambda^2} - e^{1-2\lambda}.$$

74. Αν η γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το \mathbb{R} διέρχεται από τα σημεία $A(3, 10)$ και $B(7, 8)$, να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(f(x) - 3) = 8$

ii) $f(4 + f^{-1}(x^3 + 2)) = 8.$

75. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(4, 5)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(1 + f^{-1}(2x)) < 5.$$

76. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα

$$\Delta = [-1, +\infty).$$

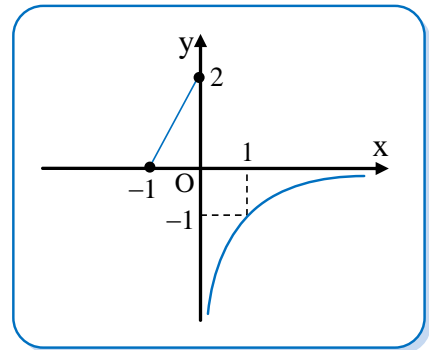
i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[-1, +\infty)$.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f^{-1}(x) = a$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.



77. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$(f(x))^2 + (f(1-x))^2 = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g δεν είναι 1-1

ii) αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$, τότε η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

78. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f \circ f$ είναι 1-1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι επίσης 1-1 και αντιστρόφως.

79. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

και

$$(f \circ f)(x) = x^2 \cdot f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι 1-1
- ii) $f(1) = 1$.

80. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$(f \circ f)(x) = -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι 1-1
- ii) η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη
- iii) η συνάρτηση f είναι περιττή.

81. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι 1-1
- ii) $f^{-1} = f$.

82. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + f(x) = x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

83. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ και τέτοια, ώστε

$$2f(x) = x - \ln f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
- ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
- iii) Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

84. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 1$

ii) $f(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0, τότε η f είναι $1-1$.

85. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + x^3 = 8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = a$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

86. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) + f(x) = -\frac{1}{4}x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι $1-1$

ii) αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.

87. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) = f(x) + 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2) = 4$, να βρείτε τις τιμές $f(4)$ και $f^{-1}(8)$.

88. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + 5f(x) = x + 6 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
- ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- v) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) < x$.

89. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(f(x)) = 9x + 8 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι 1-1
- ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- iii) $f^{-1}(x) = \frac{1}{9}[f(x) - 8]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iv) $f(9x + 8) = 9f(x) + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

90. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το \mathbb{R} τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) + f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι 1-1
- ii) η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα
- iii) αν ισχύει η σχέση $f(0) = 1$, τότε $f^{-1}(0) = 2$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 1**Θέμα 1.**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{6x^2}{x^4 + 9}.$$

- i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_1 = 0$ και ολικό μέγιστο στο σημείο $x_2 = 3$.
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ δεν είναι γνησίως μονότονη.

Θέμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x} - e^x - \frac{x}{e}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e + f(x^2)) = 0.$$

- iv) Να αποδείξετε ότι

$$f(f(x^2)) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Κριτήριο Αξιολόγησης 2

Θέμα 1.

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(2) = 1, \quad g(3) = 2$$

και

$$g(x) = e^{x-2} - f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα
- iii) να λύσετε την ανίσωση

$$e^{x-1} < f(x+1)$$

- iv) να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(e^{x-2} - f(x) - e) = 3.$$

Θέμα 2.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) - f(x) = 2x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε την τιμή $f(1)$.
- ii) Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(2) = 3$, τότε:
 - α) να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x - 2 + 2f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- β) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.



numerica.

A . L i a p i s