



Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5.Α

Ιδιότητες των Ορίων

- Όριο και Πράξεις
- Όριο Σύνθετης Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

96. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 4| + 2x + 1}{x^2 + x - 1} \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}.$$

97. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της συνάρτησης f στο x_0 όταν:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ x^2 + 3, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = 2$$

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} 2x + 10, & x < -3 \\ x^2 + x - 2, & x > -3 \end{cases} \quad \text{και } x_0 = -3.$$

98. Να βρείτε (εφόσον υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \text{αν } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \text{αν } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, & x \geq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1. \end{cases}$$

99. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 4\alpha x - \beta - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$.

100. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 4x + 3}{x^4 - 5x + 4} \qquad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{x^3 + 27}.$$

101. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x - 5}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x - 7}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2}{x - 4}.$$

102. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 4\sqrt{x} + 3}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x-2} - 1}{x - 3}.$$

103. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$.

104. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + x^2 - 2x}{x - 2}$$

105. Αν ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \kappa x}{|x|} = \lambda,$$

όπου κ, λ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

106. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ αν ισχύει η σχέση:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) + 1 - x) = 10$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{f(x) + 2x} = 1$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} (xf(x) + x^3 - 1) = 2$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x} - 1} = 8.$$

111. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^7 + 3x^4)^2 - 3(x^7 + 3x^4) + 2}{x^7 + 3x^4 - 2}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[5]{x-1} - 1}$$

112. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + 2} = 3$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x+4} - 2} = 8$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + 3x + \beta}{x^2 - 3x + 2} = -5$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + \alpha x - \beta}{1 - \sqrt{x-2}} = -10.$$

113. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0.$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))}{4g(x)}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} g\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

114. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)}{2x + 3f(x)} = 1.$$

115. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 2} = 1$.

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+4)}{x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(3+\sqrt{x})}.$$



numerica.

A . L i a p i s