

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5.Β

Ιδιότητες των Ορίων

- Όρια και Διάταξη
- Κριτήριο Παρεμβολής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

116. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 6| - x}{2 - |x|}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - |x^2 - 3x|}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 3| - |x - 2|}{x - 1}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^{10} + x + 1| + |x^2 - 1| - 2}{x}$$

117. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{3 - x}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + |x + 1|}{x + 1}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x|x|}{\sqrt{x + 4} + 2}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3|x - 2| - 4}{|x - 2|}$$

118. Έστω συνάρτηση f τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x} = 4.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 2| - 3}{x^2 - 2x} = 2.$$

119. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R}^* και τέτοια, ώστε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda^2$

- $f(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

120. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση

$$|xf(x) - |x|| \leq x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

121. Αν για κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\frac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

122. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 4 \text{ και } f(x) \geq x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \leq \frac{f^2(x) + 4}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$

123. Έστω συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

- $f(x) \leq \frac{|x|}{x} \leq f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lambda.$

Να αποδείξετε ότι $\lambda \neq 0.$

124. Αν για κάποια συνάρτηση f ισχύει η σχέση

$$f^2(x) < x^2 f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $0 < f(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$

125. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$2x \leq f(x) \leq x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 3| - 1}{x - 1} = -2.$$

126. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = 1 \quad \text{και} \quad |f(x) - g(x)| \leq x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x^2} = 4.$$

127. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

- $2 + f(x) \geq \sqrt{x^2 + 4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $4f(x) \leq f^2(x) + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lambda = 0 \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

128. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και τέτοια, ώστε

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(2x)} = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } f(2x) < f(3x) < f(4x) \text{ για κάθε } x > 0$$

και

$$f(2x) > f(3x) > f(4x) \text{ για κάθε } x < 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{f(4x)} = 1.$$

129. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 1$$

και

$$f(x) \geq x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$



numerica.

A . L i a p i s