

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.6

Μη Πεπερασμένο Όριο
στο $x_0 \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

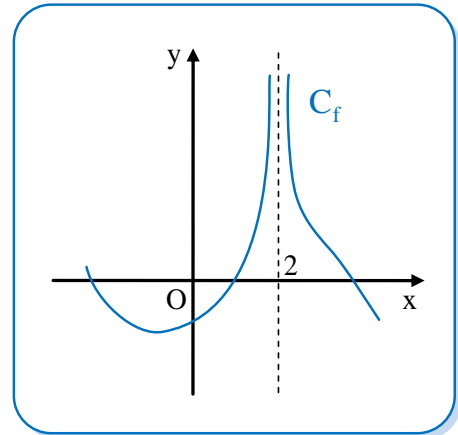
numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

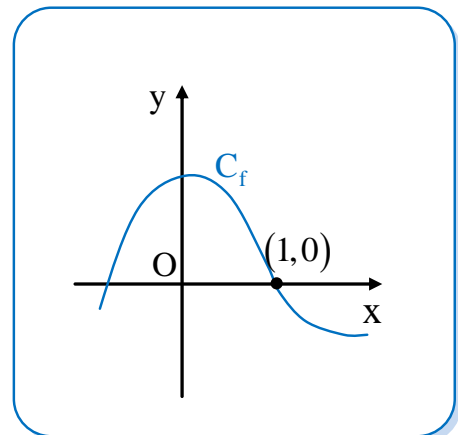
138. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x))$
 iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)}$
 v) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x)}{x^2 - 5x + 6}$ vi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{|x-2|}$.



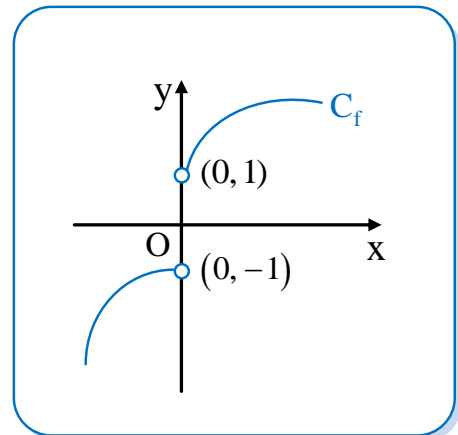
139. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα παρακάτω όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$
 iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)(x-1)}$.



140. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε – αν υπάρχουν – τα παρακάτω όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 ii) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$
 iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.



141. Να βρείτε –αν υπάρχει– το όριο της f στο x_0 , όταν:

i) $f(x) = \frac{2x+1}{x^6+x^2}, x_0 = 0$

ii) $f(x) = \frac{x+2}{|x-1|}, x_0 = 1$

iii) $f(x) = \frac{x+1}{x^3+2x^2+x}, x_0 = -1$

iv) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}, x_0 = 1.$

142. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x^3-2x^2}.$$

Να βρείτε – εφόσον υπάρχουν – τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$

143. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{\eta\mu x - x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$

144. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x) = -\infty.$

145. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $D_f = \mathbb{R}^*$

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

146. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\eta\mu x}{x} < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x} = +\infty$.

147. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu x}{x^3 - x \cdot \eta\mu^2 x}$.

148. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + \mu}{x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - 7x + \mu}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο \mathbb{R} τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

149. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$x^2 f(x) > 1 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0.$$

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6f^2(x) - f(x)}{1 + 2f^2(x)}$.

150. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \alpha f(x) + 1 \leq \sqrt{x+1} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (-1, 1)$$

όπου α πραγματική σταθερά.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)}$.

151. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x + 4} = +\infty$.

152. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$(f(x))^3 + f(x) = x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $0 < f(x) < x$ για κάθε $x > 0$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

153. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 - 2x)g(x)] = 6.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ii) δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = 3.$

154. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ στο \mathbb{R} .

- i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.
- ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2) = 0$, να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|f(x)|} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)f(x)}.$$

155. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 + 1)f(x) + xg(x)] = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + g(x)] = -1.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}.$



numerica.

A . L i a p i s