

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.7

Όριο Συνάρτησης στο Απειρο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

156. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 + 3x - 11)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x + 3)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3x^2+4}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{x^3 + 4x - 7}$

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + x}{2x^3 + 10x - 8}$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{3x+1}$

157. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 5})$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} + x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x - 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+3})$

vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + x^3} - x^2)$

158. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \cdot \frac{3x^2+1}{x^2+x+4} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+3} - \frac{x^2}{x+1} \right)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{5x^2 + 1})$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x + 2}$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$

159. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 + 2x| - 3x + 1}{x^3 + 5x - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + x| + |x^3 - 4|}{x^3 + 5x^2 - 2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1-x| + 4x - 2}{2x + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x}{|x-1|}$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|4x+1|}{x(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + |3x - x^2|}{\sqrt{x^2 - 4x} - x}$

160. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \eta\mu^2 x}{x + 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\eta\mu x}{x^2 + 5}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \right]$

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \sigma\upsilon\nu 3x)$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \ln x}{\eta\mu x - \ln x}$.

161. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{3x} - 5 \cdot 2^x + 7)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2}{5^{x+1} + 4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 7^x}{3^x + 4^x}$.

162. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

163. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(e^x) = 2$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(\ln x) = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln f(x) = +\infty$

iv) $\lim_{x \rightarrow -1^-} e^{f(x)} = 0$.

164. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\eta\mu x) - \ln x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$.

\mathbb{R}

165. Για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda x^3 + (1-\lambda)x + 4) \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu x^3 + (\mu-2)x^2 + 5}{(\mu-3)x^2 + 4x + 1}.$$

166. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 1}{2x^2 + 5} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

167. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα παρακάτω όρια να υπάρχουν και να είναι πραγματικοί αριθμοί. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τα όρια αυτά:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + \lambda x) \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + \lambda x - \lambda)$$

168. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} + \alpha x + \beta.$$

Να βρείτε:

- i)** την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός
- ii)** τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

169. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} - \alpha x - \beta \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2\}.$$

- i)** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- ii)** Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)).$$

170. Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+1} = 4,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 0.$$

171. Αν για μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{f(x)} = 0 \quad \text{και} \quad f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{f^2(x) + f(x)} - f(x) \right)$$

172. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 \eta \mu x}{x^4 + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } |f(x)| \leq \frac{x^2}{x^4 + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

173. Αν για κάποια συνάρτηση f ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{f(x)} = 4,$$

να βρείτε τα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln f(x) & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \sigma \upsilon \nu 2x). \end{array}$$

174. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και τέτοια, ώστε

$$f(x) \leq x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$

iii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{ημx} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda = 1$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 3

Θέμα 1.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{f(x)}{|x-1|}.$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{-g(x)}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x).$

Θέμα 2.

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\frac{f(x)}{x} \geq 5 - \frac{10}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$f(x) \leq x^2 - x - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 5}{x - 3}.$

Κριτήριο Αξιολόγησης 4

Θέμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha + 1)x^3 + 2x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}, & x < 1 \\ \alpha\sqrt{x} + \beta\sin(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

- i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α .
- ii) Αν το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε την τιμή του β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θέμα 2.

Έστω συνάρτηση f τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu^3 x - \eta\mu^2 x} = 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2.$$

- ii) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2-x)}{\sqrt{x+7} - 3}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{f(2x)} \left| \frac{f(x) + x}{x} \right| \right).$$



numerica.

A . L i a p i s