

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια
Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8.Α

Συνέχεια Συνάρτησης

- Συνέχεια Συνάρτησης
- Πράξεις με Συνεχείς
Συναρτήσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

175. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 1 \\ x^2 + 4, & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{3 - x}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}, \quad x_0 = 3.$$

176. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

177. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } f(x) = x^3 \ln x, & x \in (0, +\infty) \quad \text{ii) } f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{iii) } f(x) = \sin(e^x), & x \in \mathbb{R} \quad \text{iv) } f(x) = 3^x - \ln(x + 1), \quad x \in (-1, +\infty). \end{array}$$

178. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x + e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{\pi x}{4}\right), & x < 2 \\ x^2 + \ln(x-1), & x \geq 2 \end{cases}$$

179. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 5x| - 4}{x - 4}, & x \neq 4 \\ -3, & x = 4 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

184. Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) > \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, 1).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής
ii) η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

185. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f είναι 1-1 **ii)** η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

186. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(x) + 2x = xf(x) + x^3 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i)** την τιμή $f(1)$ **ii)** τον τύπο της συνάρτησης f .

187. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$1 - \sqrt{x^2 + 1} \leq xf(x) \leq x^2,$$

να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

188. Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε

$$f(1+x)f(1-x) < x^2 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

189. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$2|x| \leq f(x) \leq x^2 + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

190. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 0 και τέτοια, ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

191. Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ και τέτοια, ώστε $f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1), & 0 \leq x \leq 1 \\ f(x), & 1 < x < 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

192. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

• $f(x+y) = f(x)\sin y + f(y)\sin x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

iii) η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

193. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Αν ισχύει η σχέση

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - \sqrt{x}} = 2,$$

να βρείτε την τιμή $f(1)$.

194. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια, ώστε

$$xf(x) + \eta\mu x \leq x^2 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

195. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x)}{\eta\mu x} = +\infty.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

196. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{|x| - |\eta\mu x|} = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$

ii) $f(x) > x$ κοντά στο 0

197. Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} και τέτοια, ώστε

$$(x^2 - x)f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

i) Να βρείτε το πρόσημο της f στα διαστήματα

$$(-\infty, 0), (0, 1) \text{ και } (1, +\infty).$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(0) = f(1) = 0.$$



numerica.

A . L i a p i s