Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 — Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8.Β — Συνέχεια Συνάρτησης

- Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα
- Το Θεώρημα του Bolzano

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

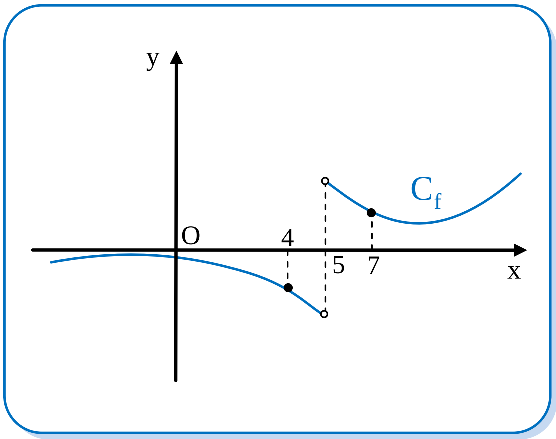
A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

198. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}-\{5\}$. Επίσης, ισχύει

$$f(4)\cdot f(7)<0.$$

Όμως, η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη. Υπάρχει αντίφαση με το θεώρημα του Bolzano;



199. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu x-x-1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

200. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=3x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

201. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x-3x^2-x+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

202. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-x^2=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

203. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις

i) $\frac{x^5+1}{x-1}+\frac{x^3+4}{x}=0$ **ii)** $\frac{2x^3-1}{x-1}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

204. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\varepsilon\varphi x$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

205. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + \kappa, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$.

ii) Να βρείτε την τιμή του λ.

iii) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

iv) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x) \ln x}.$$

206. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \ln(-x), & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \dfrac{4}{x} \eta\mu \dfrac{x}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

i) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιος, ώστε

$$f(\xi) = e^{\xi}.$$

207. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f(f(x))} = -1.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

208. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, \text{ με } x \neq y.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι συνεχής

ii) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα

iii) αν επιπλέον ισχύει $f(1) = f(2) = \dfrac{3}{2}$, τότε η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

209. Έστω f, g δύο συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε $f(1)\cdot g(2)>0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)}{x-1}+\frac{g(x)}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

210. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις $\gamma<0$ και $\alpha+\beta+\gamma>0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha x^4+\beta x+\gamma=0$$

έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

211. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=xe^{x-2}+\alpha x+\beta,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha+\beta=-1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)+f(2)=0$

ii) υπάρχει $x_0\in[0, 2]$ τέτοιο ώστε, $f(x_0)=0$.

212. Έστω συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής. Αν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$x_0^2+f(1)x_0+f(1)f(2)=0,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $(f(1))^2\geq 4f(1)f(2)$

ii) η εξίσωση $2xf(x)-f(1)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

213. Έστω συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$0<f(x)<1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$f^2(x_0)+x_0=f(x_0).$$

214. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$1+xf(x)\le ημx+συνx \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

215. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και περιττή με

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=e^{x_0}$.

216. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ και τέτοια, ώστε

$$f(1)\cdot f(2)+2<2f(1)+f(2).$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$.

217. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^4+αx^2+βx-1,\ x\in\mathbb{R},$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

ii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ετερόσημες πραγματικές ρίζες.

218. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και τέτοια ώστε

$$f(1)=-1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ μοναδικό κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$ με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

219. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi)=(1-\xi)\text{συν}\xi.$$

220. Έστω συνάρτηση $f\colon [1,3]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και τέτοια, ώστε $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2x+1)=x$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

221. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(1)=-1,\quad f(2)=2\quad \text{και}\quad f(3)=-3,$$

να αποδείξετε ότι η f δεν είναι $1-1$.

222. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε $f(1)f(2)<0$ και

$$g(x)=4+f^2(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το διάστημα $g(\mathbb{R})=[5,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

ii) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το διάστημα $g(\mathbb{R})=(\kappa,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

223. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\text{ημ}x \quad \text{για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

ii) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(0)$ και $f^{-1}(1)$.

iii) Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=-x+1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

224. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

iii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{9},$$

τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

225. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,2)$.

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(2x - f(x)) - x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως φθίνουσες

ii) η εξίσωση

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x$$

έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

226. Έστω συνάρτηση $f:\left(2,4\right)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right)<1$$

και

$$\lim_{x\to 4} f\left(x\right)>5.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left(2,4\right)$ τέτοια, ώστε

$$f\left(x_1\right)<1 \quad \text{και} \quad f\left(x_2\right)>5$$

ii) υπάρχει $x_0 \in \left(2,4\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f\left(x_0\right)=x_0.$$

227. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ με

$$\mathrm{O}\left(0,0\right),\ \mathrm{A}\left(1,0\right),\ \mathrm{B}\left(1,1\right) \text{ και } \Gamma\left(0,1\right).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο Μ της διαγωνίου ΟΒ τέτοιο, ώστε

$$\left(\mathrm{OM}\right)^4=\left(\mathrm{AM}\right)+\left(\Gamma\mathrm{M}\right).$$

228. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f\left(0\right)f\left(1\right)+4<2f\left(0\right)+2f\left(1\right)$$

και

$$g\left(x\right)=f^2\left(x\right)-4f\left(x\right)+5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f\left(x_0\right)=2$.

ii) $g\left(x\right)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iii) η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

229. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$(x-1)f(x) > x^2 - x \text{ για κάθε } x > 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > x$ για κάθε $x > 1$

ii) $f(1) \geq 1$

iii) η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-1} + \dfrac{e^x}{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$

iv) αν $x_0 = \dfrac{1}{2}$, τότε υπάρχει $\xi \in \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = 2$.

230. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$f(1) = 2,\ \ f(2) = 1$$

και

$$g(x) + g(f(x)) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = x_0$

ii) η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

numerica.

A. Liapis