Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 — Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8.Γ — Συνέχεια Συνάρτησης

- Διατήρηση Προσήμου Συνεχούς Συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

231. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0 \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x(2-x)$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(0, 2)$.

232. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) \neq 0 \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}$$

και

$$f(1)f(2)f(3)f(4) = -5.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

233. Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε:

- $f(x) = (x-1)(x-3)g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $g(2) < 0$
- $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 3)$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 3)$.

234. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(0) = 1$$

και

$$\left(f(x)\right)^2 - xf(x) = x + 1 \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(-2) < 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = -1$.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

235. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1$$

και

$$\left(f(x)\right)^2=x^2f(x)+x^2+\alpha \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=1$

ii) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει πραγματική ρίζα

iii) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

iv) $f(x)=x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

236. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε

$$f(x)\cdot g(x)\geq 1+xf(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $g(2)=1$, τότε:

α) να βρείτε το πρόσημο της f

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

237. Έστω συνάρτηση $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

$$\left(f(x)\right)^2+xf(x)=2x^2 \text{ για κάθε } x>0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda \quad \text{με} \quad \lambda\in\mathbb{R}-\{-2\}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda=1$

ii) $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

238. Έστω συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι $1-1$, συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\text{συν}x-1}=\lambda<0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της f.

239. Έστω συνάρτηση $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=f(3)$ και η συνάρτηση

$$g(x)=f(x+1)-f(x),\ x\in[0,2].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)+g(1)+g(2)=0$

ii) αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

240. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, 1−1 και τέτοια, ώστε $f(3)f(4)<0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)f(2)>0$

ii) η εξίσωση $xf(x)\cdot f(x+1)=1-x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

241. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f^2(x)-2f(x)=ημx+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(0)>1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

242. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f^2(x)=x^2-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

iii) Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=f(2)=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

243. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f^2(x)=4f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ii) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής και ισχύει η σχέση $f(0)=4$, να βρείτε τον τύπο της f.

244. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς και τέτοιες, ώστε

- $f(0) < 0$
- $f(x) + g^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g^2(x) \neq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) η συνάρτηση g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$

iii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{g(\xi)}{\xi} = \frac{g(\xi+1)}{1-\xi}.$$

245. Έστω συνάρτηση $f: [2,5] \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(2) = 24f(5)$. Έστω επίσης η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - xf(x+1), \quad x \in [2,4].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(2) + 2g(3) + 6g(4) = 0$

ii) αν η g είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = x_0 f(x_0 + 1).$$

246. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(4) + f(-4) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2) = 2$, να βρείτε το πρόσημο της f.

247. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$xf(x) + f^3(x) + 1 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f^2(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f^2(x) = +\infty$.

248. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

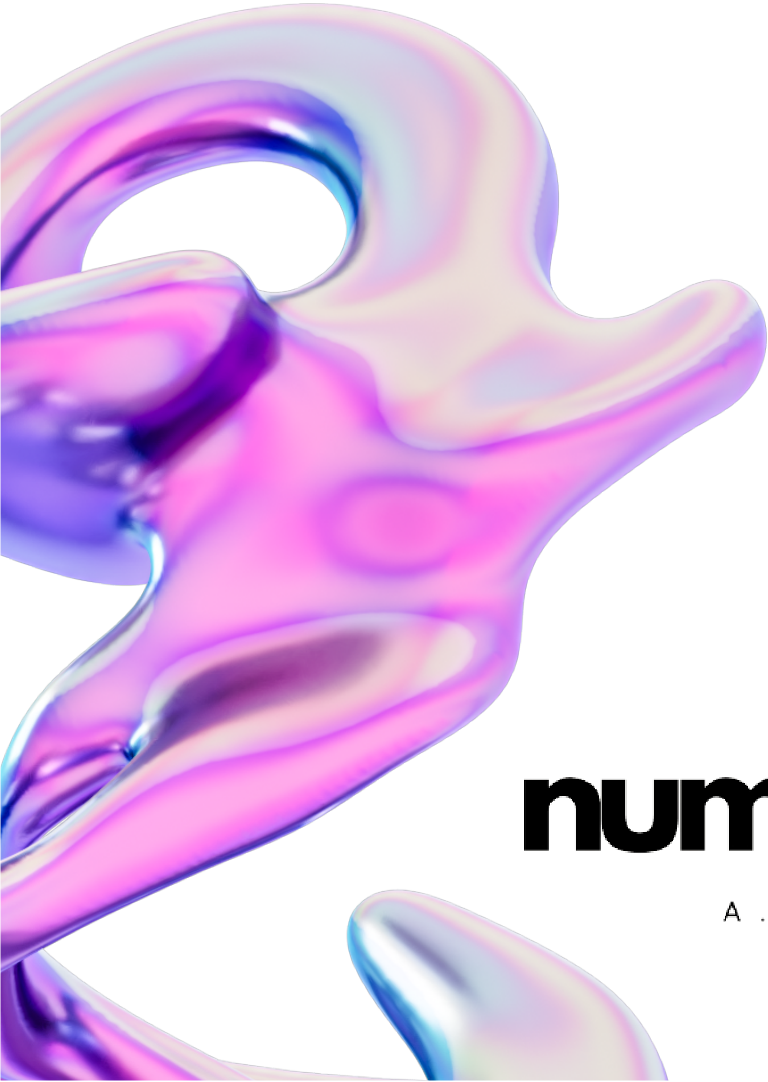
$$f(1)f(2)+4=0 \quad \text{και} \quad f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in A.$$

i) Να αποδείξετε ότι το σύνολο Α δεν είναι διάστημα.

ii) Έστω ότι $A=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ και $f(1)<f(2)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

β) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=f(3)-f(2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$.



numerica.

A. Liapis