Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 — Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8.Δ — Συνέχεια Συνάρτησης

- Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

249. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και τέτοια, ώστε $f(0)=1$ και $f(5)=6$. Να αποδείξετε ότι:

i) η ευθεία $y=4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,5)$

ii) υπάρχει μοναδικός $x_1\in(1,4)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_1)=\frac{f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)}{10}.$$

250. Έστω συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=(f(x))^2-2f(x)+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει η σχέση

$$f^2(0)+f^2(2)=4f(2)-4,$$

να αποδείξετε ότι:

i) η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

ii) $f(0)=0$ και $f(2)=2$

iii) η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_0\in(0,2)$.

251. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(1)=2$ και $f(2)=4$. Αν η εξίσωση $f(x)=3$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

252. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=0$, $f(1)=1$ και

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|>\left|x^2-x\right| \text{ για κάθε } x\in[0,1].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

ii) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

253. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(0)<f(2)<f(1).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$.

254. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$2f(2)<f(0)+f(1)<2f(3).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιος, ώστε $2f(x_0)=f(0)+f(1)$

ii) η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$.

255. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(0)=2$ και

$$f(f(x))=f(x)+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(2)=4$

ii) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=3$

iii) $f(3)=5$

iv) $f(y)=y+2$ για κάθε $y\in[2,5]$.

256. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(0)=-1,\ f(1)=1 \quad \text{και} \quad |f(x)|\le 1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

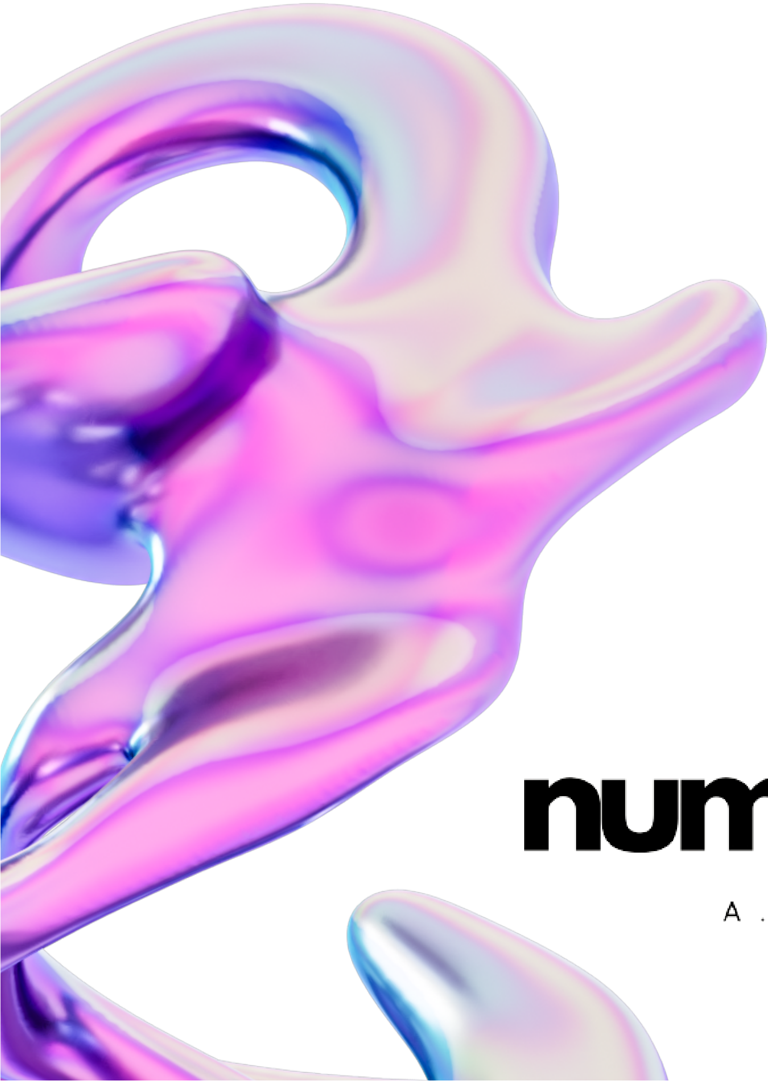
257. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f(0)=1$ και

$$f(f(x))=f(x)+20x+5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=6$

ii) υπάρχει μοναδικός $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$.



numerica.

A . Liapis