Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 — Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.8.Ζ — Συνέχεια Συνάρτησης

- Σύνολο Τιμών σε Διάστημα Μονοτονίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

264. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,5]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x} \text{ για κάθε } x\in[1,5].$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in[1,5]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$.

265. Έστω συνάρτηση f: $[0,5]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$f(0)=-1,\ f(2)=4 \text{ και } f(5)=1.$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,5]$, να βρείτε:

i) το σύνολο τιμών της f

ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

iii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=3$.

266. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=e^x-2\text{συν}x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

267. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\text{ημ}x+\text{συν}x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει λύση στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

268. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{1-x}-e^{x}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(\left(2+\sqrt{1-x}\right)e^{-x}-1\right)=0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα.

269. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{2}{x}+\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) \text{ για κάθε } x>0.$$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\xi>0$ τέτοιος, ώστε

$$\left(\frac{e\xi+1}{\xi}\right)^{\xi}=e^{e\cdot\xi-2}.$$

270. Έστω συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε

$$f(x^2)<2f(x)\le f(2x) \text{ για κάθε } x\in(0,2).$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Αν $f(2)=1$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

271. Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα, έχει συνεχή αντίστροφη συνάρτηση και σύνολο τιμών το διάστημα $f((0,1))=(-\infty,0)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x<0$

ii) η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{f^{-1}(x)}=+\infty.$

272. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{x}\right) - x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f = g$

ii) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

iii) το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

iv) $f^{-1}(x) = -\ln\left(e^{x} - 1\right)$ για κάθε $x > 0$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 5

Θέμα 1.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$xf(x)=2x^2+\eta\mu x \quad \text{για κάθε} \quad x\neq 0.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$2x-1\le f(x)\le 2x+1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

iii) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=2$.

Θέμα 2.

Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x)=g^2(x)+2g(x)+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η συνάρτηση g είναι συνεχής και $1-1$
- η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-1)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο σημείο $x_0=0$

ii) η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη

iii) η εξίσωση

$$\frac{f(x)-4}{x-3}=\frac{g(x)}{x}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 6

Θέμα 1.

Έστω συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(x)\geq\frac{1}{x}+1 \text{ για κάθε } x\in(0,1]$$

και

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-2}{\sqrt{x}-1}=6 \;.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=2$.

ii) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$g(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Θέμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\ln x+2x-2 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης g.

iv) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x)=g^2(x) \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

numerica.

A. Liapis