Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

numerica.

A. Liapis

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Όταν λέμε ότι «η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Α» εννοούμε ότι το Α είναι το πεδίο ορισμού της. Σ Λ

2. Για να οριστεί μία συνάρτηση f αρκεί να δοθεί το πεδίο ορισμού της και η τιμή της $f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Σ Λ

3. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εξίσωση $y=f(x)$. Σ Λ

4. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f. Σ Λ

5. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f. Σ Λ

6. Η τιμή μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_0$ και της C_f. Σ Λ

7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης της f. Σ Λ

8. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Σ Λ

9. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Σ Λ

10. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f+g$ είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως. Σ Λ

11. Η συνάρτηση $g\circ f$ ονομάζεται σύνθεση της g με την f. Σ Λ

12. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, ισχύει $g\circ f=f\circ g$. Σ Λ

13. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. Σ Λ

14. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Σ Λ

15. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ αν και μόνο αν

$$f(x) \le f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$ Σ Λ

16. Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$ αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x_1 = x_2, \quad \text{τότε } f(x_1) = f(x_2).$$ Σ Λ

17. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{αν } x_1 \ne x_2, \text{ τότε } f(x_1) \ne f(x_2).$$ Σ Λ

18. Μία συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x. Σ Λ

19. Μία συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Σ Λ

20. Μία συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο. Σ Λ

21. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ είναι και συνάρτηση $1-1$ στο διάστημα αυτό. Σ Λ

22. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Σ Λ

23. Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ

24. Αν μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύουν

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{για κάθε } x \in A$$

και

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{για κάθε } y \in f(A).$$ Σ Λ

25. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$. Σ Λ

26. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Σ Λ

27. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι $1-1$ και η γραφική της παράσταση έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} που η γραφική της παράσταση διέρχεται επίσης από το σημείο A. Σ Λ

28. Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Σ Λ

29. Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Σ Λ

30. Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 ή διαφορετική από αυτό. Σ Λ

31. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - \ell\right) = 0$. Σ Λ

32. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$. Σ Λ

33. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$ Σ Λ

34. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0,$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Σ Λ

35. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq 0$, τότε $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0. Σ Λ

36. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν όριο στο x_0 και είναι τέτοιες, ώστε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Σ Λ

37. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right|.$$ Σ Λ

38. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$ Σ Λ

39. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$. Σ Λ

40. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$ υπάρχουν επίσης τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Σ Λ

41. Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$. Σ Λ

42. Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) < f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Σ Λ

43. Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Σ Λ

44. Ισχύει η σχέση $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ Λ

45. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$. Σ Λ

46. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$. Σ Λ

47. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Σ Λ

48. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Σ Λ

49. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$. Σ Λ

50. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$. Σ Λ

51. Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$$ Σ Λ

52. Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty.$$ Σ Λ

53. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Σ Λ

54. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Σ Λ

55. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = 0.$$ Σ Λ

56. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = 0.$$ Σ Λ

57. Όταν καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ, τότε λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ. Σ Λ

58. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\nu} = 0$. Σ Λ

59. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\nu = -\infty$. Σ Λ

60. Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\alpha_\nu \ne 0$ ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\alpha_\nu x^\nu\right)$ Σ Λ

61. Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$. Σ Λ

62. Αν $\alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$. Σ Λ

63. Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Σ Λ

64. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Σ Λ

65. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. Σ Λ

66. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Σ Λ

67. Μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$. Σ Λ

68. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής. Σ Λ

69. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο x_0, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι επίσης συνεχής στο x_0. Σ Λ

70. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. Σ Λ

71. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). Σ Λ

72. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[\alpha,\beta]$. Σ Λ

73. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε κάποιο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, αλλά δεν είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα (α,β). Σ Λ

74. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta) \geq 0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β). Σ Λ

75. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$, ισχύει $f(\beta)>0$. Σ Λ

76. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, η οποία ειναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο. Σ Λ

77. Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, διατηρεί πρόσημο στο Δ. Σ Λ

78. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ

79. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το διάστημα Δ. Σ Λ

80. Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της. Σ Λ

81. Κάθε συνάρτηση f η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, δεν παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Σ Λ

82. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Σ Λ

83. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α,β), τότε η f παίρνει στο (α,β) μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Σ Λ

84. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta)$ παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία ελάχιστη τιμή. Σ Λ

85. Το σύνολο τιμών κάθε συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι ένα κλειστό διάστημα $[m, M]$. Σ Λ

86. Το σύνολο τιμών κάθε συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα (α,β) είναι ένα ανοικτό διάστημα (m, M). Σ Λ

87. Κάθε συνάρτηση f η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, δεν παίρνει ούτε ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή σ΄αυτό το διάστημα. Σ Λ

88. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι γνησίως αύξουσα σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το ανοικτό διάστημα $(f(\alpha), f(\beta))$. Σ Λ

89. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$. Σ Λ

90. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) όπου $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ και $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$. Σ Λ

91. Υπάρχει συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, έχει σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το $[f(\alpha), f(\beta)]$ και δεν είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ

92. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοικτού διαστήματος $\Delta=(\alpha,\beta)$ μέσω μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f ειναι ανοικτό διάστημα. Σ Λ

93. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(A, B]$ όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$. Σ Λ

numerica.

A . L i a p i s