Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Διαφορικός Λογισμός (Α' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1 — Η έννοια της Παραγώγου

- Παράγωγος σε Σημείο
- Παράγωγος και Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν:

i) $f(x)=xe^x,\ x_0=0$

ii) $f(x)=|x|\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x),\ x_0=0$

iii) $f(x)=\left|x^2-x\right|,\ x_0=1$

iv) $f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x\le 0\\ \eta\mu x\ , & x>0\end{cases},\ x_0=0.$

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=|x-1|\cdot\sqrt{x},\ x\ge 0\,.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

α) στο σημείο $x_0=0$

β) στο σημείο $x_1=1$.

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)>\sqrt{x} \text{ για κάθε } x>0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)\eta\mu x\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει η σχέση

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=7\,,$$

τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f(0)=2$

ii) να αποδείξετε ότι $f'(0)=7$

iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x^2-x}=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $f'(0)=1$

iii) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$.

7. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x}=0.$

8. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xf(1)}{x^2-x}=f'(1)-f(1).$$

9. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\eta\mu x+1\le f(x)\le x^2+\eta\mu x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$ **ii)** $f'(0)=1$.

10. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε

$$g(x)\le f(x)\le g(x)+x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=g(0)$

ii) η συνάρτηση f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=g'(0)$.

11. Αν για κάποια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$|f(x)|\le x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και τέτοια, ώστε $f(0)\le 0$ και

$$f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)\ge 10x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=1$.

13. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\sqrt{3}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(0)=\sqrt{3}$

ii) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

14. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$

ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+h)-f^2(x_0-h)}{h}=4f(x_0)f'(x_0)$.

15. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} f(2x), & x\le 0\\ 4f(x), & x>0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)=f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=g'(0)=0$.

16. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(0)=4 \text{ και } f'(0)=1.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ κοντά στο 0.

ii) Αν για κάποια συνάρτηση g ισχύει $g(0)=2$ και

$$g(x)=\sqrt{f(x)} \text{ κοντά στο } 0,$$

να βρείτε την $g'(0)$.

17. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(1)\le f(x)\le f(2) \text{ για κάθε } x\in[1,2].$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στο 2, να αποδείξετε ότι:

i) $f'(1)\ge 0$

ii) $f'(2)\ge 0$.

18. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

- $f(1)=f(2)=0$
- $f'(1)>0$
- $f'(2)>0$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>0$ κοντά στο 1

ii) $f(x)<0$ κοντά στο 2

iii) υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

19. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$f'(\alpha)>0 \quad \text{και} \quad f'(\beta)<0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>f(\alpha)$ κοντά στο α

ii) $f(x)>f(\beta)$ κοντά στο β

iii) η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

20. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών α, β για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x>0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

21. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+\alpha, & x<2 \\ \dfrac{\beta}{x}, & x\ge 2 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

22. Θεωρούμε συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$xg(x)\le f(x)\le xg(x)+x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0=0$, τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=g(0)$

iii) αν η συνάρτηση g έχει τύπο

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\ne 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

τότε η ευθεία με εξίσωση $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

23. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και τέτοια, ώστε

$$x^2f(x)\le \eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

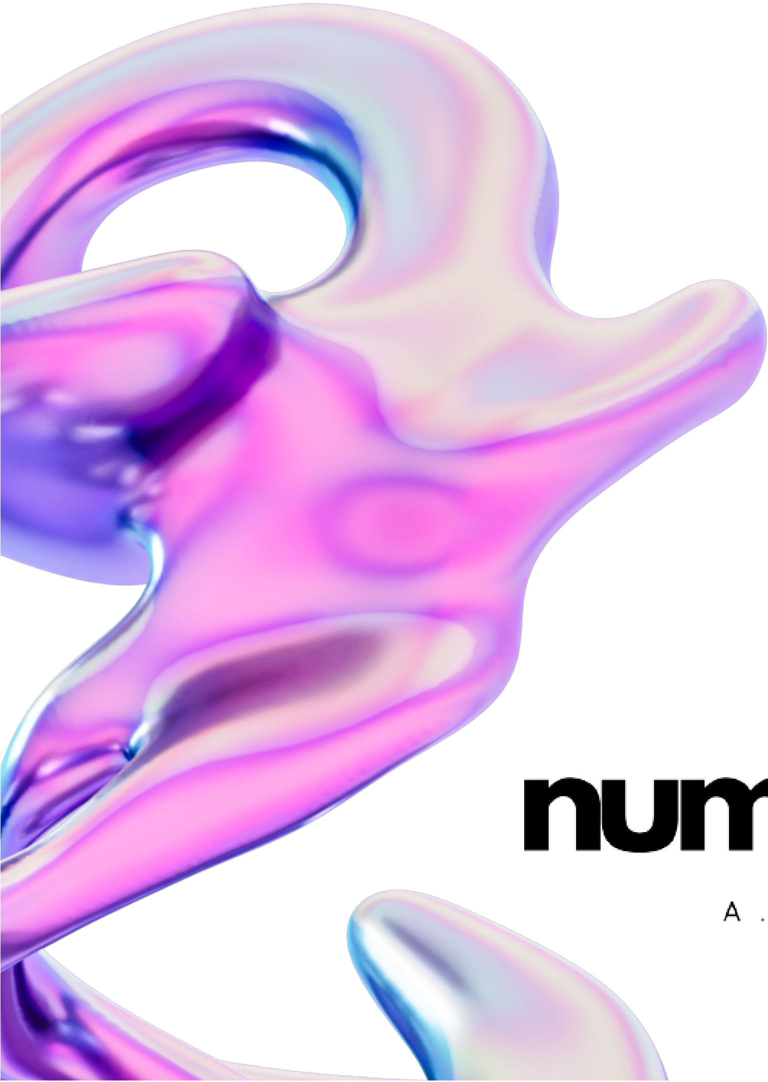
24. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2-1}=2.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=4$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

iii) Αν επιπλέον ισχύει $f(2)=f(3)=7$, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει και δεύτερο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.



numerica.

A. Liapis