

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός
(Α' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2

Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις -
Παράγωγος Συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A . L i a p i s

Προτεινόμενες Ασκήσεις

25. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1$

ii) $f(x) = \eta\mu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

iii) $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

iv) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$

26. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}.$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

28. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν επιπλέον ισχύει $f(0) \neq 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

29. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** $f(0) = 0$
- ii)** $f'(0) = 4$
- iii)** $f'(x) = 2x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 30.** Έστω συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι
- $$f'(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (\alpha, \beta).$$

31. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και τέτοια, ώστε

$$|f(x)| \leq |ημx| \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** $f(0) = 0$ **ii)** $|f'(0)| \leq 1.$
- 32.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0) = f(1)$ και

$$\left| f'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < (x - y)^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x \neq y.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i)** η συνάρτηση f' είναι συνεχής
- ii)** $|f'(0)| < 1$
- iii)** $|f'(1)| < 1$
- iv)** η εξίσωση $f'(x) = x^2 + x - 1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

33. Έστω συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x) - f(y) = (x - y)g(x - y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- δεν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} [h \cdot g(h)] = 0$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη.

34. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

η οποία άγεται από το σημείο $A(-1, 0)$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 2$ η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

- i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 3$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής A της (ε) με την C_f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την C_f .

36. Αν η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 4x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ να βρείτε τα όρια:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$
- iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cos x - 1}{x}$.

37. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(2) < 2f'(2).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η εξίσωση $f(x) - xf'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$
- ii) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



numerica.

A . L i a p i s