Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Διαφορικός Λογισμός (Α' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.3 — Κανόνες Παραγώγισης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

38. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=4x^5+x-\sqrt{2}$ **ii)** $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

iii) $f(x)=e^x+2\ln x$ **iv)** $f(x)=\ln x+4\sqrt{x}$

v) $f(x)=2^x-x^2-5x$ **vi)** $f(x)=2\varepsilon\varphi x-3\sigma\varphi x$.

39. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x\eta\mu x$ **ii)** $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\ln x$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ **iv)** $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+2}$

v) $f(x)=\dfrac{x^3}{1+e^x}$ **vi)** $f(x)=\dfrac{xe^x}{\ln x}$.

40. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\left(x^2+x\right)^{11}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{e^x+1}$

iii) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ **iv)** $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}$

v) $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ **vi)** $f(x)=\eta\mu^3(2x)$.

41. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$ **ii)** $f(x)=2^{\varepsilon\varphi x}$

iii) $f(x)=\sqrt{x}\eta\mu x$ **iv)** $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$

v) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ **vi)** $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2+2}$.

42. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^x,\quad x>0$ **ii)** $f(x)=x^{\eta\mu x},\quad x>0$

iii) $f(x)=\left(x^4+2\right)^x$ **iv)** $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\ln x}$

v) $f(x)=x^{e^x},\ x>0$ **vi)** $f(x)=\left(1+e^x\right)^{e^x}$.

43. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2\ , & x<0 \\ ημx\ , & x\geq 0 \end{cases}$ **ii)** $f(x)=\begin{cases} συνx-1, & x<0 \\ 0\ , & x\geq 0 \end{cases}$

iii) $f(x)=|x-2|\cdot(x^2-4)$ **iv)** $f(x)=x|x^2-x|$

v) $f(x)=\begin{cases} x^4\ , & x\leq 0 \\ 2x\sqrt{x}\ , & x>0 \end{cases}$ **vi)** $f(x)=\begin{cases} ημ(1-x)\ , & x\leq 1 \\ \sqrt{x-1}\ , & x>1. \end{cases}$

44. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|ημx}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ **ii)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ημ^2x}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x}-1}, & 0<x\neq 1 \\ 0\ , & x=1 \end{cases}$ **iv)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-συνx}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$

v) $f(x)=\begin{cases} x^3ημ\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ **vi)** $f(x)=\begin{cases} ημx\cdot ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0. \end{cases}$

45. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\ln 3$ **ii)** $f(x)=e^{2x}ημ3x$

iii) $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$ **iv)** $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

v) $f(x)=\begin{cases} x^4\ , & x<1 \\ 6x^2-8x+3\ , & x\geq 1 \end{cases}$ **vi)** $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+12, & x<2 \\ \dfrac{8}{x}\ , & x\geq 2 \end{cases}$

46. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^{\nu}}{\nu+1}\ln x, \quad x>0$$

όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε $f'(e)=e$.

i) Να αποδείξετε ότι $\nu=2$.

ii) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f''(x)=0$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\ln x}{3(x-1)}$.

47. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f'(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x>0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}f(x)$ για κάθε $x>0$

ii) $4x^2f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

48. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot f(2x)=x^2-x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$

ii) η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

49. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f'(1)=1$. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση

$$g(x)=f\left(x^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}$$

ισχύουν οι σχέσεις:

i) $g'(0)=0$ **ii)** $g''(0)=2$.

50. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f\left(x^3\right)=x^5 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(1)=\dfrac{5}{3}$

ii) $f''(1)=\dfrac{10}{9}$.

51. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε

$$f(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=e^{\eta\mu x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $g'of$

ii) $(gof)'$.

52. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ και τέτοιες, ώστε:

- $f'(1)=g(1)$
- $g'(1)=f(1)$
- $(fg)'(1)=2f'(1)g'(1)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=g(1)$

ii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0=1$.

53. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι $1-1$ και τέτοια, ώστε οι συναρτήσεις f και f^{-1} να είναι παραγωγίσιμες.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \text{για κάθε} \quad x\in f(\mathbb{R}).$$

ii) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f(0)=1$ και $f'(0)=2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^3 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f'\left(f^{-1}(0)\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

55. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1)>0$ και

$$\left(f(x)\right)^2+xf(x)=2x^2 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ **ii)** $f'(1)=1$.

56. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f\left(x^2\right)+x^2f(x)=4x^4 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$, να βρείτε:

i) την τιμή $f(1)$ **ii)** την τιμή $f'(1)$

iii) το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2x^2}{x^2-1}$.

57. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)\eta\mu x-f(\alpha)\eta\mu\alpha}{x-\alpha}=f'(\alpha)\eta\mu\alpha+f(\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{e^x-e^\alpha}=\dfrac{f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)}{e^\alpha}$.

58. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=x^3-x+\alpha \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν οι C_f και C_g τέμνονται σε κάποιο σημείο A του άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha=1$

ii) οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο σημείο A είναι κάθετες μεταξύ τους.

59. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^* .$$

έχουν στα κοινά τους σημεία εφαπτόμενες κάθετες μεταξύ τους.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\alpha}{x^2+1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha\neq 0.$$

Να βρείτε:

i) τη συνάρτηση f'

ii) την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}^*$, για την οποία η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ σχηματίζεται με τον άξονα $x'x$ γωνία $30°$.

61. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-2x+4,\quad x\in\mathbb{R}$$

στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $y=4x+5$

ii) κάθετη προς την ευθεία (n) με εξίσωση $y=\frac{1}{2}x$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\left(x^2+1\right)\ln x \quad \text{για κάθε } x>0.$$

Να βρείτε:

i) τη συνάρτηση f'

ii) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$.

63. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^3+1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία άγεται από το σημείο $A(0,-1)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x+1$. Να αποδείξετε ότι:

i) η ευθεία (ε) έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με την C_f

ii) η ευθεία (ε) εφάπτεται στην C_f σε ένα μόνο από τα παραπάνω σημεία.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{4-x}{x^2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

και το σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ της γραφικής της παράστασης.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$.

ii) Να αποδείξετε ότι για $\alpha=4$, η παραπάνω εφαπτομένη έχει και δεύτερο, εκτός του Μ, κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=x+\kappa$, όπου κ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa=1$

ii) η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=f^{-1}(x)+2, \quad x>0.$$

67. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{\alpha-x},\ x\in\mathbb{R}-\{\alpha\} \quad \text{και} \quad g(x)=e^{-\beta x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τους οποίους οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

68. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2+\alpha,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{\beta}{x},\ x\in\mathbb{R}^*.$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=4x+4$ η οποία εφάπτεται στις C_f και C_g.

i) Να βρείτε τους α και β.

ii) Να βρείτε τα σημεία επαφής της ευθείας (ε) με τις C_f και C_g.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης gof και η ευθεία (ε) έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(-2,-1)$.

69. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x)=-\frac{1}{x}, x\in\mathbb{R}^*.$$

Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha,\alpha^2)$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B\left(\beta,-\frac{1}{\beta}\right)$ ταυτίζονται, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$

ii) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην παραπάνω κοινή εφαπτομένη στο σημείο A.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ εφάπτεται επίσης στη C_f στο σημείο $B(1,f(1))$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

iii) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)-2x-1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)-2x-1}$.

71. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = x^2 - x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = -x^2 + 5x + \alpha \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

i) την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$

ii) την τιμή του α για την οποία η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη C_g.

72. Αν η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 4x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο σημείο $A(1, f(1))$, να βρείτε:

i) την τιμή $f(1)$

ii) την τιμή $f'(1)$

iii) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = f(5 - x^2) + x, \; x \in \mathbb{R}$$

στο σημείο $B(2, g(2))$.

73. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) + f'(x)\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = 2f'(0)$.

ii) Αν η συνάρτηση f ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο $O(0, 0)$.

74. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ και τέτοια, ώστε

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x>0$$

και

$$f^2(x)+f(x^2)=2x \quad \text{για κάθε} \quad x>0.$$

Να βρείτε:

i) την τιμή $f(1)$

ii) την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

75. Έστω δύο συναρτήσεις $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f'(2)=1$
- $g(x)=f(x^2+x)-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(1)=1$

ii) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ εφάπτεται και στη C_g στο σημείο $B(1,g(1))$.

76. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $f(0)<0<f(1)+f'(1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=xf(x),\ \ x\in\mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$

ii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f'(1)=0$, τότε η γραφική παράσταση της g έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x\eta\mu x+4 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $x-3y+5=0$.

iii) Να υπολογίσετε τις τιμές

$$f''(2\kappa\pi) \quad \text{και} \quad f''\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{με} \quad \kappa\in\mathbb{N}.$$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f', στα οποία οι εφαπτόμενες ευθείες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

78. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\left(f(x)\right)^3=3x^2f(x)+x^6+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2x$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)\right)^2\cdot f'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)+2x^5 \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x$ εφάπτεται στη C_f.

numerica.

A. Liapis