Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Διαφορικός Λογισμός (Α' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.4 — Ρυθμός Μεταβολής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

79. Το μήκος ενός κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό -2 cm/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το εμβαδό αυτού του κύκλου είναι ίσο με 4π να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται:

i) η ακτίνα του κύκλου

ii) το εμβαδό του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

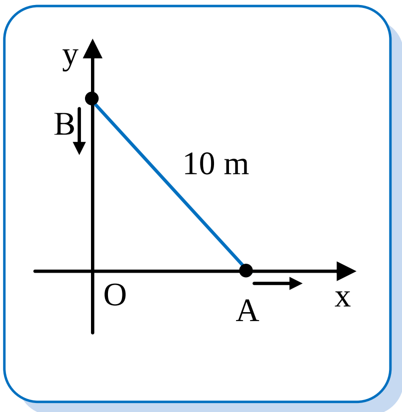
80. Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x,e^x)$ με $x>0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού, όταν $x=4$ cm.

81. Ο όγκος ενός κύβου ελαττώνεται με ρυθμό 12 cm^3/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία η ακμή του κύβου είναι 2 cm, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται:

i) η ακμή του κύβου

ii) η ολική επιφάνεια του κύβου.

82. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m έχει τα άκρα του Α, Β στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy αντιστοίχως. Η ταχύτητα με την οποία κινείται το Α είναι $\upsilon = 3\,m/sec$. Τη χρονική στιγμή t_0, που το Α βρίσκεται σε απόσταση $(OA)=8m$ από την αρχή των αξόνων, να βρείτε:



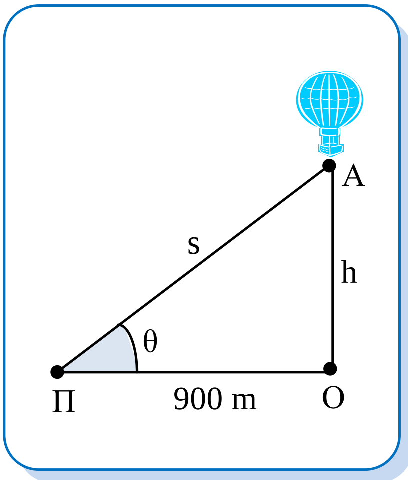
i) την ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο Β

ii) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΟΑΒ.

83. Ένα αερόστατο Α απογειώνεται σε απόσταση 900 μέτρων από έναν παρατηρητή Π και ανεβαίνει κατακόρυφα με ταχύτητα 150 μέτρων το λεπτό. Όταν το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 1200 μέτρων, να βρείτε:

i) την απόσταση (ΠΑ) του αερόστατου από τον παρατηρητή

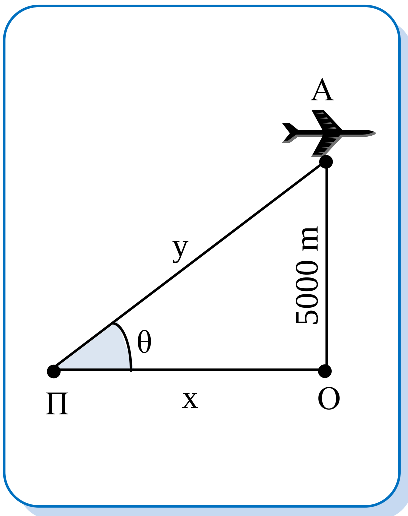
ii) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η οπτική ακτίνα ΠΑ μεταξύ αερόστατου και παρατηρητή με το οριζόντιο επίπεδο ΠΟ.



84. Ένα αεροπλάνο Α πετάει οριζόντια σε ύψος 5000 m απομακρυνόμενο από έναν παρατηρητή Π. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η γωνία θ που σχηματίζει η οπτική ακτίνα με το οριζόντιο επίπεδο είναι 45°, η γωνία αυτή μικραίνει με ρυθμό 0,05 rad/sec.

i) Ποια είναι η ταχύτητα του αεροπλάνου τη χρονική αυτή στιγμή;

ii) Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης (ΠΑ) είναι $250\sqrt{2}\ \text{m/sec}$.



85. Μια ποσότητα ραδιενεργού ουσίας ακτινοβολεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η μάζα (σε mg) των πυρήνων που έχουν απομείνει μετά από χρόνο t sec να είναι

$$M(t)=M(0)e^{-ct}$$

όπου c μια σταθερά και $M(0)$ η ποσότητα της ουσίας τη χρονική στιγμή $t=0$.

i) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 (συναρτήσει της σταθεράς c) κατά την οποία έχει απομείνει η μισή ποσότητα ραδιενεργού υλικού από την αρχική.

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός με τον οποίο ελαττώνεται η μάζα του ραδιενεργού υλικού τη στιγμή t_0;

86. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεταβάλλονται ως προς το χρόνο t. Αν πλευρά x ελαττώνεται με ρυθμό $2\,cm/sec$ και η πλευρά y αυξάνεται με ρυθμό $3\,cm/sec$, να βρείτε:

i) το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου κάθε χρονική στιγμή t

ii) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή t_0 που οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 5\,cm$ και $y = 7\,cm$.

87. Ένας μεταλλικός κυκλικός δίσκος θερμαίνεται και η ακτίνα του αυξάνεται με ρυθμό $0,001\,cm/min$. Να βρείτε:

i) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η περίμετρός του, κάθε χρονική στιγμή t

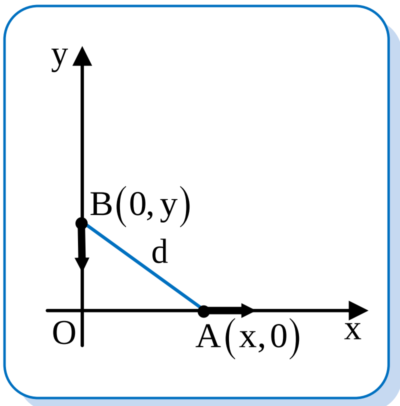
ii) το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδό του, τη στιγμή t_0 που η ακτίνα του είναι ίση με $20\,cm$.

88. Σημείο Μ κινείται στην παραβολή (c) με εξίσωση $y^2 = x$ με $y > 0$ έτσι, ώστε η προβολή του Α στον ημιάξονα Ox να απομακρύνεται από το Ο με ταχύτητα $\upsilon = 5m/sec$. Αν Β είναι η προβολή του Μ στον άξονα $y'y$, τη στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $(OA) = 9\,m$ να βρείτε:

i) την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται το Β από το Ο

ii) το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδό του ορθογωνίου ΟΑΜΒ.

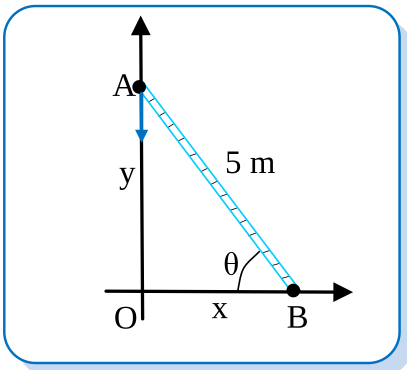
89. Ένα σημείο $A(x,0)$ κινείται πάνω στον θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα $20\ cm/sec$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Την ίδια χρονική στιγμή $(t = 0)$ ένα άλλο σημείο $B(0,y)$ βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα Oy σε απόσταση 90 cm από το $O(0,0)$ και πλησιάζει προς το $O(0,0)$ με ταχύτητα $-30\,cm/sec$. Να βρείτε:



i) τις συναρτήσεις θέσης των σημείων Α και Β.

ii) τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d = (AB)$ των δύο σημείων τη χρονική στιγμή $t = 2\,sec$.

90. Μία σκάλα μήκους $5\,\text{m}$ είναι ακουμπισμένη σε έναν τοίχο όταν η βάση της αρχίζει να ολισθαίνει. Τη στιγμή που η βάση απέχει $4\,\text{m}$ από τον τοίχο, η ταχύτητα ολίσθησης της βάσης είναι $1{,}5\,\text{m/sec}$.

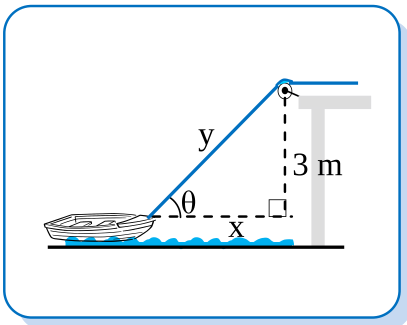


i) Με ποια ταχύτητα κινείται εκείνη τη στιγμή η κορυφή της σκάλας;

ii) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο και το έδαφος;

iii) Ποιος είναι εκείνη τη στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος;

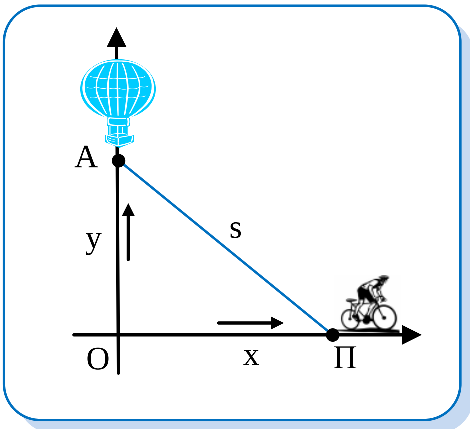
91. Ένα μικρό βαρκάκι τραβιέται με σχοινί προς την αποβάθρα. Το σκοινί, που είναι περασμένο σε έναν κρίκο στερεωμένο 3 m ψηλότερα από την πλώρη, μειώνεται με ρυθμό 1 m/sec. Να βρείτε:



i) πόσο γρήγορα πλησιάζει το βαρκάκι την αποβάθρα, όταν το μήκος του σκοινιού είναι $5\,\text{m}$

ii) με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η γωνία θ.

92. Αερόστατο ανυψώνεται κατακόρυφα πάνω από επίπεδο και ίσιο δρόμο με σταθερό ρυθμό ανύψωσης $1\,\text{m/sec}$. Τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος $65\,\text{m}$, ένα ποδήλατο που κινείται με ταχύτητα $17\,\text{m/sec}$ περνά ακριβώς κάτω από το αερόστατο.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσης $x(t)$, $y(t)$ του ποδήλατου Π και του αερόστατου Α, ως προς το σημείο Ο.

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ ποδήλατου και αερόστατου δίνεται κάθε χρονική στιγμή t από τον τύπο

$$s(t)=\sqrt{(17t)^2+(t+65)^2}.$$

iii) Πόσο γρήγορα θα αυξάνεται η απόσταση $s(t)$ μετά από 3 sec;

93. Μια σφαιρική μπάλα από σίδηρο διαμέτρου 8cm καλύπτεται από ομοιόμορφο στρώμα πάγου, ο οποίος λειώνει με ρυθμό $10\,\text{cm}^3/\text{min}$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το πάχος του πάγου ισούται με 2 cm, να βρείτε:

i) το ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το πάχος του πάγου

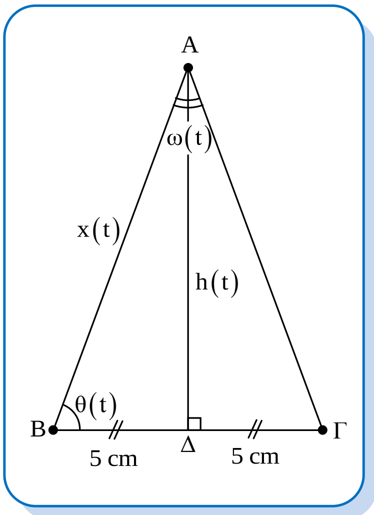
ii) πόσο γρήγορα μειώνεται το εμβαδό της εξωτερικής επιφάνειας του πάγου.

94. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η βάση ΒΓ έχει μήκος 10 cm και η κορυφή Α απομακρύνεται από τη βάση με ταχύτητα $13\text{cm}/\text{sec}$. Τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία η κορυφή Α απέχει από τη βάση απόσταση ίση με 12 cm, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i) της πλευράς ΑΒ

ii) της γωνίας Β

iii) της γωνίας ΒΑΓ.



95. Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+2x, \quad x>0$$

έτσι, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $5\,\text{cm}/\text{sec}$. Ένα δεύτερο σημείο Ν κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{3}{x}, \quad x>0$$

έτσι, ώστε η τεταγμένη του να μειώνεται με ρυθμό $6\,\text{cm}/\text{sec}$. Κάποια χρονική στιγμή t_0 τα σημεία Μ και Ν συμπίπτουν. Τη στιγμή αυτή να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:

i) της τεταγμένης του σημείου Μ

ii) της τετμημένης του σημείου Ν.

96. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\ln x,\quad x>0$$

και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$x(t)=t^3+t+1,\quad t\in[0,\,5]$$

όπου t σε λεπτά και $x(t)$ σε μέτρα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια χρονική στιγμή κατά τη οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ γίνεται διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

97. Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^3,\quad x>0$$

έτσι ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό 3 m/sec. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ισχύει η σχέση $(OB)=3(OA)$ όπου Ο η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:

i) της τετμημένης του σημείου Α

ii) της τεταγμένης του σημείου Β

iii) του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ.

98. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=2x-\ln x,\quad x>0$$

και η τετμημένη του αυξάνεται με θετικό ρυθμό. Κάποια χρονική στιγμή t_0 οι ρυθμοί μεταβολής της τετμημένης και της τεταγμένης του σημείου Μ είναι ίσοι. Τη στιγμή αυτή να βρείτε:

i) το σημείο Μ.

ii) το ρυθμό μεταβολής της απόστασης (ΟΜ), αν τη χρονική στιγμή t_0 η τετμημένη του Μ έχει ταχύτητα $\sqrt{5}\ \text{cm}/\text{sec}$.

99. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{1+2x^2}, \quad x>0.$$

i) Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η τετμημένη του σημείου Μ είναι ίση με 2 cm και η τεταγμένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $12\,\text{cm}/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ.

ii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός αύξησης της τεταγμένης του σημείου Μ να είναι διπλάσιος του ρυθμού αύξησης της τετμημένης του.

100. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{1-x}, \quad x>0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς μία ρίζα την οποία και να βρείτε.

ii) Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α η προβολή του στον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του είναι ίσος με μηδέν.

Κριτήριο Αξιολόγησης 7

Θέμα 1.

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία x_0 :

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ και $x_0=e^2$

ii) $f(x)=e^{2x}συν3x$ και $x_0=0$

iii) $f(x)=συν^2 4x$ και $x_0=\dfrac{\pi}{16}$

iv) $f(x)=\sqrt{x}\cdot ημ2x$ και $x_0=0.$

Θέμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=2x^3-2x^2+3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(ε)$ της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,f(1))$ είναι το μοναδικό σημείο επαφής της $(ε)$ με τη C_f, δηλαδή ότι η $(ε)$ δεν εφάπτεται σε άλλο σημείο στη C_f εκτός του σημείου A.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(ε)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=e^x+x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Κριτήριο Αξιολόγησης 8

Θέμα 1.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}\ .$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta: y=\frac{3}{4}x$.

iii) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f. Τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3,4)$ της τροχιάς του, η τεταγμένη y μειώνεται με ρυθμό $6\ \text{cm/sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x, την ίδια χρονική στιγμή t_0.

Θέμα 2.

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)>0,\qquad f'(1)=1$$

και

$$f^2(x)-f\left(x^4\right)=2+\ln^2 x\quad \text{για κάθε}\quad x>0.$$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f''(1)=-1$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2-\sqrt{x+2}}.$$

numerica.

A. Liapis