Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 — Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.5 Α — Το Θεώρημα Rolle

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(2)=f(1)+3$. Να αποδείξετε ότι:

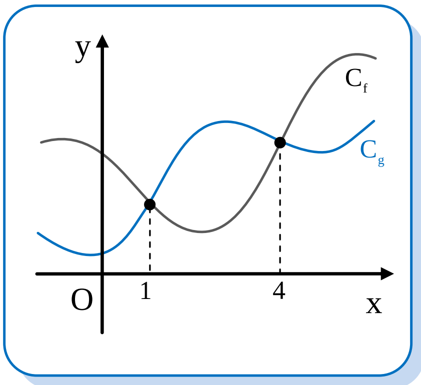
i) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(x)-x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[1,2]$

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

2. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία με τετμημένες 1 και 4 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιος, ώστε οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi,f(\xi))$ και $B(\xi,g(\xi))$ να είναι μεταξύ τους παράλληλες.



3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\text{εφ}x\,.$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(\pi)$.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

iii) Υπάρχει αντίφαση των παραπάνω συμπερασμάτων με το θεώρημα του Rolle;

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^x+x^3-3x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

5. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ και τέτοια, ώστε

$$f(0)=f(1) \quad \text{και} \quad f'(x)=e^{x^2} \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής σε ένα τουλάχιστον από τα σημεία 0, 1.

6. Δίνεται η εξίσωση

$$x^{\nu}+5x^2+7=0$$

όπου ν θετικός ακέραιος με $\nu\geq 3$. Να αποδείξετε ότι:

i) αν ο ν είναι άρτιος, τότε η εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες

ii) αν ο ν είναι περιττός, τότε η εξίσωση έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$10\alpha x^9-5\beta x^4+2\beta x-\alpha=0$$

με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^x-3ex^2+4x-1=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

9. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η σχέση

$$\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}+\frac{\delta}{4}=0,$$

να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2+\frac{\gamma}{3}x^3+\frac{\delta}{4}x^4 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δεν είναι $1-1$

ii) η εξίσωση $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^{2004} - 1002x^2 + \alpha = 0$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός, έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3x^2 - 14x + 2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^5 + \alpha x^4 + \beta x + \gamma \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$-1+\alpha-\beta+\gamma<0, \qquad \gamma>0 \qquad \text{και} \qquad 1+\alpha+\beta+\gamma<0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$

ii) η εξίσωση $5x^4 + 4\alpha x^3 + \beta = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

13. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(-1)=f(1)=3$. Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $x^2 f(x) + x - 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$

ii) η εξίσωση $2xf(x) + x^2 f'(x) + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

14. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Αν η εξίσωση

$$f(4)x^4+f(2)x^2-x+1=0$$

έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

15. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε $f(0)=0$, $g(1)=0$ και

$$f(x)\cdot g(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $f\cdot g$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες

ii) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}+\frac{g'(x_0)}{g(x_0)}=0.$$

16. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $f(\alpha)=e^{\alpha}$ και $f(\beta)=e^{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=e^{-x}\cdot f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$$

έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με την ευθεία $y=1$

ii) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$.

17. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1)+f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

ii) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=(x-3)f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δεν είναι $1-1$

iii) υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi)=(3-\xi)f'(\xi)$.

18. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και τέτοια, ώστε

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta .$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

19. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και τέτοια, ώστε

$$\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=\beta-\alpha \quad \text{και} \quad f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$

ii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $A(\xi-1,0)$.

20. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1)=2f(2)=3f(3)$. Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση

$$f(x)+xf'(x)=0$$

έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1,3)$

ii) υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi)=-2\frac{f'(\xi)}{\xi} .$$

21. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)+f(2)=0.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)f'(x)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

22. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=f'(0)=0$. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει τύπο

$$g(x)=(1-x)f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι:

i) οι συναρτήσεις g και g' δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $(1-\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)$.

23. Έστω f και g συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμες στο διάστημα $(1,2)$ με $f(1)=f(2)=0$ και τέτοιες, ώστε

$$f'(x)g(x)-g'(x)f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(1,2).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιος, ώστε $g(x_0)=0$.

24. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(x)\cdot f(1-x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

25. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1)<f(3)<f(2)$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

26. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε

$$f(0)=0,\ f(5)=5 \quad \text{και} \quad f(6)=2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0 \in (0,5)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=2$

ii) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

27. Έστω f, g δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες, ώστε

$$g(x)=(x-1)f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι:

i) η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει δύο τουλάχιστον κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\xi)}{\xi-1}+f'(\xi)=0$.

28. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{f'(2)}{f(2)} \quad \text{και} \quad f(x)\neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[1,2].$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)\cdot f(\xi)=(f'(\xi))^2$.

29. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)\neq 0$. Αν η συνάρτηση f' είναι $1-1$ και ισχύει η σχέση $f'(0)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha<0<\beta$

ii) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)e^{x_0}=f(\alpha)$.

30. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=2^x,\ x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(x)=-x^2+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$$

έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,4)$.

31. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$2f^2(x)+1<3f(x) \text{ για κάθε } x\in[1,2]$$

και

$$f'(x)\neq\frac{1}{2} \text{ για κάθε } x\in[1,2].$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}x_0$.

32. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και τέτοια ώστε $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση

$$g(x)=xf(x),\quad x\in[\alpha,\beta]$$

δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της σ' αυτό να διέρχεται από το σημείο $M(0,2f(x_0))$.

33. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) με

$$\alpha<f(x)<\beta \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

και

$$f'(x)\neq 1 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\xi$.

34. Έστω συναρτήσεις $f,\ g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με f παραγωγίσιμη και τέτοιες, ώστε:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>1$
- $(x^2+1)f(x)=f(x^2)$ για κάθε $x>1$
- $g(x)=\dfrac{x^2-1}{f(x)}$ για κάθε $x>1$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)=g(x^2)$ για κάθε $x>1$

ii) η εξίσωση $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ έχει άπειρες ρίζες.

35. Έστω συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=0 \quad \text{και} \quad f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(1,4).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,4]$

ii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(4)>0$, τότε

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(1,4].$$

36. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)>0 \text{ και } f'(1)>f(1).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ii) αν ισχύει η σχέση

$$f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty)$$

τότε η εφαπτομένη του ερωτήματος **i)** είναι μοναδική.

37. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

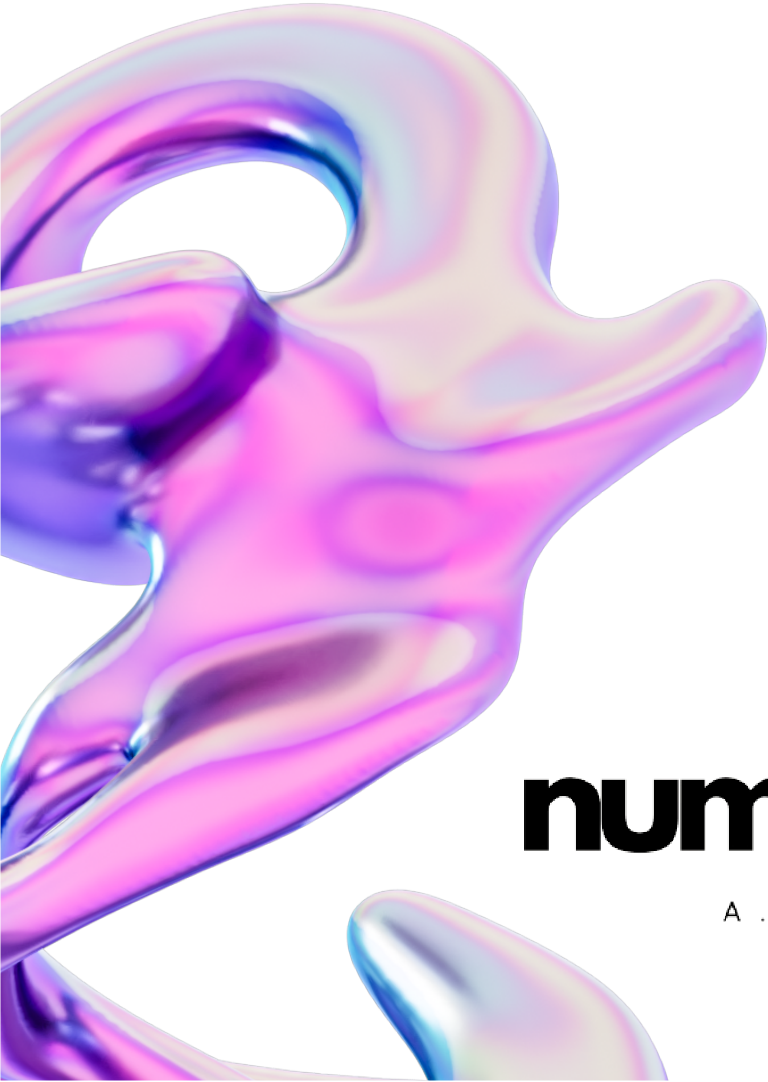
$$f\left(x^2\right)=\left(x^2+x\right)f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'\left(\xi^2\right)=\frac{2\xi+1}{2\xi}f(\xi).$$



numerica.

A . Liapis