Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός Λογισμός (Β' Μέρος)

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.5 Β

Το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

numerica.

A. Liapis

Προτεινόμενες Ασκήσεις

38. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad 4\le f'(x)\le 5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$9\le f(2)\le 11.$$

39. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2+4} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=2$

ii) $f(2)-f(1)<1$.

40. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με την f' γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι

$$f(1)<\frac{f(0)+f(2)}{2}.$$

41. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\le f(1) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$f(4)\le 4f(1).$$

42. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(1)=1 \quad \text{και} \quad |f'(x)|\le 2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$-7\le f(5)\le 9.$$

43. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και τέτοια, ώστε

$$f(1) \le f'(x) \le f(2) \text{ για κάθε } x \in (1,2).$$

Να αποδείξετε ότι $f(2) \ge 2f(1) \ge 0$.

44. Έστω συνάρτηση $f:[1,2] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και τέτοια, ώστε

$$f(2) = f(1) + 1 \quad \text{και} \quad f'(x) \ne 1 \quad \text{για κάθε } x \in (1,2).$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$.

45. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με $f(-5) = -5$, $f(5) = 5$ και τέτοια, ώστε

$$|f'(x)| \le 1 \text{ για κάθε } x \in (-5,5).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5,5)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0)+5}{5} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{5-f(0)}{5}$$

ii) η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln x \quad \text{για κάθε} \quad x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα

ii) αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $\dfrac{1}{\beta} < \dfrac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \dfrac{1}{\alpha}$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\varepsilon\varphi x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα

ii) $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha<\beta$.

48. Να αποδείξετε ότι:

i) $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$ για κάθε $x>0$

ii) $1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$ για κάθε $x>1$.

49. Να αποδείξετε ότι

$$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)<\frac{2}{x}<\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x>2.$$

50. Να αποδείξετε ότι:

i) $\left|\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}\right|\le\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|$ για κάθε $x>0$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}\right)=0$.

51. Έστω συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)+f(2)=f(1) \quad \text{και} \quad |f''(x)|\le 1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in[0,2].$$

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(\xi_1)=f(2) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=f(2)-f(1)$$

ii) $|f(1)|<2$.

52. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=1-x_0$.

ii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

53. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=3$ και $f(2)=5$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=4$

ii) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

54. Έστω συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $f(0)f(2)>0$ και $f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε

$$f'(\xi_1)=-f(0) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=f(2)$$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

55. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε $f(1)=f(3)=0$. Αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0=2$, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)<0$ και $f'(\xi_2)>0$

ii) η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ξ_1,ξ_2).

56. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1)>0$ και $f(2)=f'(2)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=-f(1)$

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)>0$.

57. Έστω συνάρτηση $f[1,4]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1,4]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,4)$ και τέτοια, ώστε $f(1)=f(4)=0$ και $f(2)>0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$

ii) υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)<0$.

58. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(0)=f(2)=1$ και $f(1)=2$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(\xi_1)=1$ και $f'(\xi_2)=-1$

ii) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $|f''(x_0)|>1$.

59. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f(0)=1 \quad \text{και} \quad |f'(x)|\le 1 \text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x\in(0,1]$ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-1}{x}$

ii) $0\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[0,1]$.

60. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f στο σημείο $B(5,f(5))$, να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in(2,5)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)=0$.

61. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν μια ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στα σημεία της $A(1,f(1))$ και $B(2,f(2))$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1,2)$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 1

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι, ώστε

$$\alpha - \beta > 2 \quad \text{και} \quad \alpha + \beta > 0 \ .$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

ii) η εξίσωση

$$4x^3 + 3x^2 + 2\alpha x + \beta = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Θέμα 2

Δίνεται η εξίσωση

$$2^x = x^2 \ .$$

Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει:

i) μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 2)$

ii) ακριβώς τρεις ρίζες, τις x_0, $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 2

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$

iii) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f''(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f' είναι $1-1$

ii) η εξίσωση

$$f(3x) - f(2x) = f(2x) - f(x)$$

έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

numerica.

A. Liapis